GEOMETRIAE CAVALERII

LIBER SEXTVS.

In quo de Spatijs Helicis, & Solidis inde genitis, ac alijs quibusdam ex superioribus deductis, speculatio instituitur.

DEFINITIONES,

I.

SI, dato quocumque circulo, super eiusdem centro, ad distantiam omnium punctorum recti transitus ipsius semidiametri, circulorum circumferentiæ describi intelligantur; prædictæ circumferentiæ simul sumptæ dicantur. Omnes circumferentiæ dati circuli. Deffin. 3. l. 2.

II.

ET si à præfato circulo quęcumque figura abscissa intelligatur; portiones omnium circumferentiarum dicti circuli, conceptæ in abscissa figura, dicentur. Omnes circumferentiæ eiusdem abscissæ figuræ.

III.

SPatium Helicum voco, quod copræhenditur sub spirali, vel eius quacumque portione, & rectis, quæ à terminis eiusdem spiralis, seu illius portionis, ad initium reuolutionis ducuntur.

IV.

SPiralem verò intelligo iuxta diffinitionem Archimedis lib. de Spiralibus, nempè, si cuiuscumque circuli radius æquali celeritate moueatur circa ipsius centrum (cuius aliud extremum punctum periphæriam describet) initio autem circulationis discedat à centro punctum æqueuelociter motum super radio, taliter vt eodem tempore prædictum punctum percurrat circumferentiam, & hoc ipsum radium, quod ex compositione duorum motuum descripta à puncto, quod radium percurrit, ipsa linea, sit ea, quam voco spiralem, cuius initium dicitur ipsum centrum, terminus verò aliud extremum punctum ipsius radij; & initium circulationis, siue voluta ipse radius: Appellatur autem hæc, spiralis in prima reuolutione genita, sicuti aliæ etiam sunt in alijs reuolutionibus descriptibiles, producto radio, & continuato motu, vt in secunda, in tertia, in quarta reuolutione, & sic deinceps, vnde & descripti circuli dicuntur primi, secundi, tertij, &c. quæ Archimedem lib. de Spiralibus recolenti melius innotescent, eiusdem enim terminos in hoc Libro passim vsurpabimus

SCHOLIVM.

ASpice Schema Prop. 9. huius, in quo est circuli radius, AE, qui æqueuelociter motus circa, A, describit circulum, SME, ipsum verò, E, circumferentiam, MSE, initio autem reuolutionis discedat ab, A, punctum motum æqueuelociter super, AE, quam percurrat eo tempore, quo punctum, E, pertransit circumferentiam, MSE, designans curuam, AIE, hæc igitur dicitur spiralis in prima reuolutione orta, cuius initium, A, terminus, E, &, AE, vocatur circulationis initium: Exempla autem spiraliũ in alijs reuolutionibus genitarum habes in Schemate Cor. Prop. 20. huius, etenim, LSO, in secunda, OTP, in tertia, PVG, autem in quarta reuolutione genitæ dicuntur.

THEO-

THEOREMA I. PROPOS. I.

CIrculorum æqualium, necnon sectorum æqualium, & ab eodem, vel æqualibus circulis abscissorum, omnes circumferentiæ sunt æquales.

Hæc Propositio facilè per superpositionem ostendetur. Si enim circuli æquales ad inuicem superponantur, ita vt centrum centro congruat, etiam ipsi circuli congruent, cum supponantur æquales, vnde & eorum radij sint æquales, congruentibus autem circulis, etiam omnes vnius circumferentiæ congruent omnibus alterius circumferentijs, & ideò inter se æquales erunt. Eadem pariter superpositionis adhibita via, ostendemus sectorum æqualium, ab eodem, vel æqualibus circulis abscissorum omnes circumferentias inter se æquales esse, quod erat demonstrandum.

THEOREMA II. PROPOS. II.

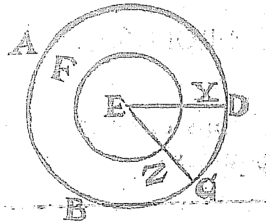
OMnis circulus æqualis est triangulo rectangulo, cuius radius est par vni eorum, quæ sunt circa rectum angulum, circumferentia verò basi.

Hæc ostenditur ab Archimede lib. de Dimensione Circuli, Propos. 1. propterea ibi recolatur.

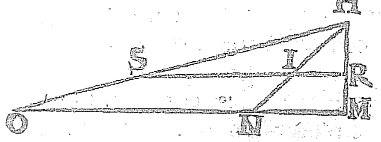
THEOREMA III. PROPOS. III.

OMnis sector circuli æqualis est triangulo rectangulo, cuius circuli radius est par vni eorum, quæ sunt circa rectum, circumferentia verò basi illius sectoris.

Si circulus, ABCD, cuius radius, ED, & sector, EDC, exposito vero triangulo, HOM, cuius angulus, HMO, sit rectus, & letus, HM, æquale ipsi, ED, &, MO, circumferentiæ, ABCD, 33. Sexti Elem.
sit, MN, æqualis circumferentiæ, CD; & iungatur, HN. Dico Ex antec.
ergo sectorem, ECD, æquari triangulo, HNM. Nam circulus, ABCD, ad sectorem, CED, est vt circumferentia, ABCD, ad circumfe-



cumferentiam, CD, eſt autem circulus, ABCD, æqualis triang. HOM, ergo triangulus, HOM, ad ſectorem, ECD, eſt vt circumferẽtia, ABCD, ad circumferentiam, CD, ideſt vt, OM, ad, MN, ideſt vt triangulus, HOM, ad, HNM, igitur idem triangulus, HOM, ad ſectorem, ECD, ad triangulum, HNM, eandem habet rationem, ergo ſector, ECD, eſt æqualis triangulo, HNM, quod oſtendere opus erat.



COROLLARIVM I.

Hinc patet, ſi ſumpto vtcumque puncto in, ED, vt, X, centro, E, ad diſtantiam, X, circuferentia, FZX, deſcripta fuerit inſuper abſciſſa, HR, æquali ipſi, EX, per, R, ducta fuerit, SR, parllela ipſi, OM, ſecans, HN, in, I, trapezium, OSRM, æquari reſiduo circuli, ABCD, ab eo dempto circulo, FZX, quod reſiduum dicatur faſcia circulorum, BD, FX, nam circulus, BD, ad circulum, FX, eſt vt quadratum, DE, ad quadratum, EX, ideſt vt quadratum, MH, ad quadratum, HR, ideſt vt triangulus, HOM, ad triangulum, HSR, vnde

Coroll. 1. 11. l. 3. *quia circulus, BD, æquatur triangulo, HOM, etiam circulus, FZX, æquatur triangulo, HSR, vnde faſcia, BF, æquatur trapezio, OSRM;*

Coroll. 1. 19. l. 2. *eodem modo colligemus reſiduum ſectoris, DEC, ab eo dempto ſectore, XEZ, quod dicatur eorundem ſectorum faſcia, ſcilicet ipſum, ZXDC, æquari trapezio, IRMN.*

COROLLARIVM II.

Patet inſuper, quia circulus, CDB, æquatur triangulo, HOM, & circulus, FZX, triang. HSR, item circumferentia, ABCD, ipſi OM, &, FZX, ipſi, SR, (nam, DE, æquatur ipſi, MH, &, EX, ipſi, RH,) quod veluti, OM, ad, SR, eſt vt, MH, ad, HR, ita circumferentia, ABCD, ad, FZX, erit vt, DE, ad, EX. Sic etiam oſtendemus ſimilium ſectorum, CED, ZEX, circumferentias, CD, ZX, eſſe vt ſemidiametri, DE, EX, & ipſos ſimiles ſectores eſſe vt quadrata ſemidiametrorũ, DE, EX, quoniã

ſunt

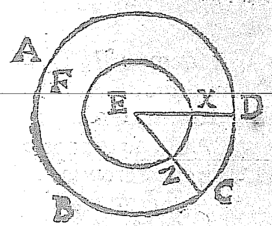
ſunt circulorum, à quibus abſcinduntur partes proportionales, ipſi autem circuli ſunt, vt diametrorum quadrata.

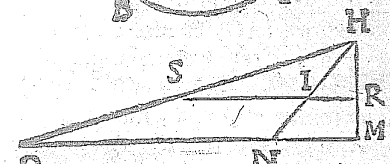
THEOREMA IV. PROPOS. IV.

Dati circuli, necnon ſimiles ſectores inter ſe ſunt, vt omnes eorundem circumferentiæ.

Sint in eadem antecedentis figura circuli quinque, BADC, FXZ, deſcripti ſuper eodem centro, E, & ab iiſdem intelligantur abſciſſi ſimiles ſectores, DED, XEZ. Dico circulos, DABC, FZX, necnon ſectores, DEC, XEZ, inter ſe eſſe, vt omnes ipſorum circumferentiæ. Sit denuò expoſitũ triãgulum, HOM, cuius ſit angulus rectus, HMO, latus, HM, æquale radio, ED, &, MO, circumferentiæ, DCBA, abſciſſa autem, HR, æquali ipſi, EX, & per, R, ducta parallela ipſi, OM, quæ ſit, SR, intercepta lateribus, HO, HM, patet, vt dicebatur in Corol. 2. ant. Propoſ. quod circumferentia, FZX, æquatur ipſi, SR, eodem modo abſcindentes ab ipſis, HM, ED, verſus, H, E, puncta æquales quaſcunque rectas lineas, & per earum terminos ducentes parallelam quidem ipſi, OM, in triangulo, & circumferentiam ſuper centro, E, in circulo, ABCD, manifeſtum erit prædictam circumferentiam æquari prædictæ parallelæ, lateribus, HO, HM, interceptæ, & vnicuique circumferentiæ in circulo, ABCD, ſic deſcriptæ reſpondere ſuam parallelam in triãgulo, HOM, cum ſint rectę, HM, ED, æquales, igitur concludemus omnes circumferentias circuli, DABC, æquari omnibus lineis trianguli, HOM, regula, OM, ſicut etiam omnes circumferentias circuli, FZX, æquari omnibus lineis trianguli, HSR, regula eadem, OM, quapropter, vt omnes lineæ trianguli, HOM, ad omnes lineas trianguli, HSR, ideſt vt triãgulum, HOM, ad, HSR, 3. l. 2.
ideſt vt circulus, DABC, ad circulum, FZX, ita omnes circumferentiæ circuli, ABCD, erunt ad omnes circumfarentias circuli eiuſdem, FZX; quod & ſimuli methodo de ſectoribus ex. g. DEC,

XEZ,



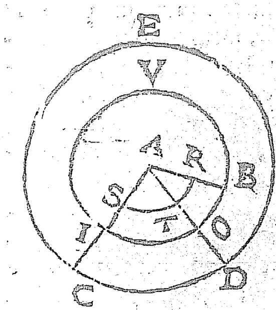


XEZ, ducta, HN, quæ abſcindat, NM, æqualem circumferentię, CD, facilè oſtendemus, hæc autem erant demonſtranda.

THEOREMA V. PROPOS. V.

QVicumque ſectores inter ſe comparati, ſeu quæcumque figuræ ex ſectoribus compoſitæ ad ſectores, vel ad figuras ex ſectoribus compoſitas comparatæ, habent eandem rationem, quam omnes ipſarum circumferentiæ ad omnes illarum circumferentias.

Sint quicunque circuli ſuper centro, A, nempè, ECD, maior, &, VIO, minor, & in, ECD, ſit ſector quicunque, CAD, & ſimiliter in, VIO, quilibet ſector, OAB. Dico ſectorem, CAD, ad ſectorē, OAB, eſſe vt omnes circumferentias, CAD, ad omnes circumferentias, OAB. Secent radij, CA, AD, circumferentiam, VIO, in punctis, I, O; Eſt ergo ſector, CAD, ſimilis ſectori, IAO, & ideò eſt ad illum,



Ex antec. vt omnes circumferentiæ ad omnes circumferentias, ſed & vt ſector, IAO, ad ſectorem, OAB, ita omnes circumferentiæ ad omnes circumferentias, nam ſector, IAO, ad, OAB, eſt vt circumferentia, IO, ad, OB, vt verò, IO, ab, OB, ſic, deſcripta circumferentia, STR, vtcumque, ipſa, ST, ad, TR, eſt enim, IO, ad, ST, vt OA, ad, AT, ideſt vt, OB, ad, TR, vnde, permutando, vt, IO, ad, OB, ſic, ST, ad, SR, & vt vnum ad vnum, ita omnia ad omnia, ideſt vt, IO, ad, OB, ita omnes circumferentiæ, IAO, ſectoris ad omnes circumferentias ſectoris, OAB, ſed vt, IO, ad, OB, ſic, vt dictū eſt, ſe habet ſector, IAO, ad, OAB, ergo, IAO, ad, OAB, eſt vt omnes circumferentiæ, IAO, ad omnes circumferentias, OAB, ſed & ſectorem, CAD, ad, IAO, eſſe oſtenſum eſt, vt omnes circumferentiæ, CAD, ad omnes circumferentias, IAO, ergo ex æquali ſector, CAD, ad ſectorem OAB, eſt vt omnes circumferentiæ, CAD, ad omnes circumferentias, OAB. Et componendo figurā compoſita ex ſectoribus, CAD, OAB, ad ſectorē, OAB, erit vt omnes circumferentiæ figurę eiuſdem, ad omnes circumferentias ſectoris, OAB, veluti etiam ſi prædicta figura non

Coroll. 2. 3. huius.

ad

ad ſectorem, ſed ad aliam quamcunq; figuram ex ſectoribus compoſitam compararetur, oſtenderemus, eaſdem figuras eſſe inter ſe, vt omnes earundem circumferentiæ, quod demonſtrare opus erat.

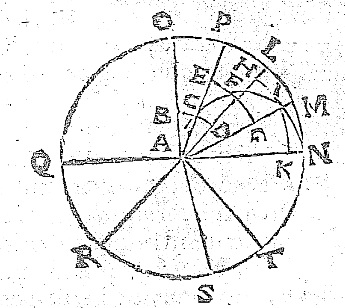
COROLLARIVM.

Patet autem, veluti oſtenſum eſt ſectores, AIO, AOB, eſſe vt omnes eorum circumferentiæ eodem modo demonſtrari poſſe, circulum, VOB, & ſectorem, AOB, & in vniuerſam circulos, & ſuos ſectores inter ſe eſſe, vt omnes eorum circumferentiæ.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

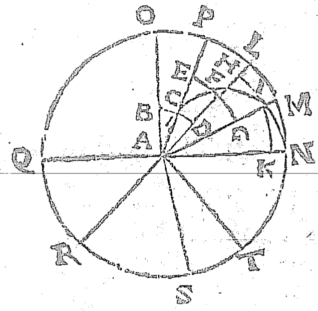
SI in circulo ab eiuſdem centro ad circumferentiam curuam quædam linea illius conditionis producatur, vt quæcunq; rectæ lineæ à centro ad ipſam pertingentes (præter illius extrema iungentem) intra illud ſpatium cadant, quod comprehenditur ducta curua, & illius extrema iungente: Erit dictum ſpatium ad propoſitum circulum, vel quemcunq; ſectorem, vt omnes eiuſdem circumferentiæ ad omnes illius circumferentias.

Sit quicunque circulus, NOQT, & centrum, A, curua, AFN, ducta à centro, A, ad periphæriam, cui incidat in, N, & ſit eius conditionis, qualis ſuppoſitum eſt, ſitq; iuncta, AN. Dico igitur ſpatium, ſeu figuram, AFN, ad circulum, NOQT, vel ad quemcunque ſectorem, eſſe vt omnes eiuſdem circumferentiæ ad omnes illius circumferentias. Fiat vt circulus, NOQT, ad figuram, NFA, ita circumferentia, NOQT, ad circumferentiam, QR, ita enim erit, & circulus, NOQT, ad ſectorem, QAR, iunctis, QA, AR, vnde ſector, QAR, erit æqualis figuræ, AFN, vel ergo



omnes circumferentiæ, QAR, æquantur etiam omnibus circumferentijs figuræ, AFN, & ſic quia ſector, QAR, ad circulum, NOQT, QT, eſt vt omnes eiſdem circumferentiæ ad omnes illius circumf etiam figura, AFN, ad circulum, NOQT, & conſequenter etiam ad quęcumq; illius ſectorem per anteced. Prop. & Cor. erit vt omnes circumfer. ad omnes circumferentias: Vel, niſi omnes circũferentiæ, QAR, æquantur omnibus circumferentijs figuræ, AFN, erunt eiſdem maiores, vel minores, ſint primò maiores, quantitate omnium circumferentiarum ſectoris, AST, intellecta autem à centro, A, ducta ipſa, AO, tangente curuam, AFN, in puncto, A, quæ circumferentiæ incidat in, O, ſecetur circumferentia, ON, bifariam in, L, & rurſus partes, OL, LN, bifariam in punctis, P, M, & hoc ſemper fiat donec ad circumferentias deuẽtum ſit, quarum vna quæque ſit minor, ST, ſcilicet ipſæ, OP, PL, LM, MN, & à centro, A, ad puncta, P, L, M, extendantur rectæ, AP, AL, AM, quæ ſecabunt curuam, AFN, earum enim portiones inter centrum, & curuam interceptæ, ex hypoteſi cadunt intra ſpatium, ANFA, ſecent in, C, F, I, & centro, A, interuallis, AC, AF, AI, arcus deſcribantur, BCD, EFG, HIK, incidẽtes proximis rectis lineis, à centro eductis, in punctis, B, D; E, G; H, k. Quoniam ergo omnes circumferentiæ ſectoris, QAR, ſuperant omnes circumferentias figuræ, AFN, quantitate omnium circumferentiarum ſectoris, AST, omnes autem circumferentiæ figuræ compoſitæ ex ſectoribus, NAM, IAH, FAE, CAB, ideſt figuræ ſpatio, AFN, circumſcriptæ, ſuperant omnes circumferentias figuræ compoſitæ ex ſectoribus, KAI, GAF, DAC, ideſt figuræ eidem ſpatio inſcriptæ, quantitate omnium circumferentiarum ſe- ſectoris, BAC, & quadrilineorum, ECDF, HFGI, MIkN, quæ ſimul adæquantur omnibus circumfèrentijs ſectoris, MAN, vt facilè oſtendi poteſt, propterea omnes circumferentiæ figuræ circũſcriptæ ſuperant omnes circumferentias inſcriptæ quantitate omnium circumferentiarum ſectoris, MAN, quæ cum ſint minores omnibus circumferentijs ſectoris, TAS, ideò omnes circumferentiæ figuræ, circumſcriptæ ſuperabunt omnes circumferentias inſcriptæ minori quantitate, & eædem multò minori quantitate ſuperabunt omnes circumferentias ſpatij, AFN, quam omnes circũferentiæ ſectoris, AQR, ſuperent omnes circumferentias ſpatij, AFN,

I. Decimi Elem.



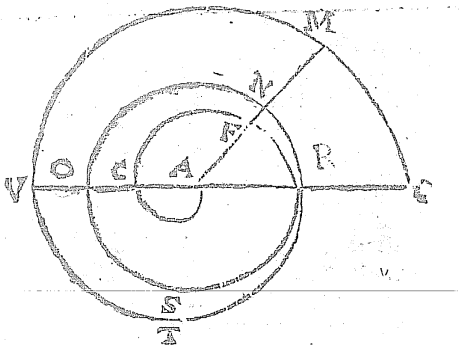
FN, ergo omnes circumferentiæ figuræ circumſcriptæ minores Ex antec.
erunt omnibus circumferentijs ſectoris, QAR, cum verò figura ex
ſectoribus compoſita ad ſectorem, ſit vt omnes circumferentiæ ad
omnes circumferentias, ideò etiam figura circumſcripta minor erit
ſectore, QAR, & multò minor erit figura, AFN, ſectore, QAR, ſed
& æqualis illi oſtenſa fuit, quod eſt abſurdum, igitur abſurdum etiã
eſt dicere omnes circumferentias ſectoris, QAR, maiores eſſe omnibus circumferentijs ſpatij, AFN. Dico nunc neque eſſe minores, ſi hoc verum eſt, ſint minores omnibus circumferentijs ſectoris, SAT, & repetita eadem conſtructione, ſit ſpatio, AFN, circũſcripta figura ex ſectoribus compoſita, & alia inſcripta, ita vt circumſcriptæ figurę omnes circumferentiæ ſuperent omnes circumferentias inſcriptæ minori quantitate, quam ſint omnes circumferentiæ ſectoris, SAT, ergo omnes circumferentiæ figuræ, AFN, ſuperabunt omnes circumferentias figuræ inſcriptæ multò minori quantitate, quam eædem ſuperent omnes circumferentias, QAR, ergo omnes circumferentię inſcriptæ figuræ maiores erunt omnibus circumferentijs ſectoris, QAR, ergo figura inſcripta maior etiam erit ſectore, QAR, & eodem multò maior erit figura, AFN, contra hypoteſim, eſt enim illi æqualis, quod eſt abſurdum, igitur abſurdum etiam eſt omnes circumferentias ſectoris, QAR, minorés eſſe omnibus circumferentijs figuræ, AFN, ſed neq; ſunt illis maiores, vt oſtenſum eſt, ergo ſunt eiſdem æquales, ſed omnes circumferentiæ ſectoris, AQR, ad circulum, OQSN, vel quemcunq; ſectorem comparatæ ſunt, vt ſpatium ad ſpatium, ergo ſpatium Ex antec.
quoque, AFN, ad circulum, OQSN, vel ad quemcunque ſectorem, erit, vt omnes illius circumfer. ad omnes iſtius circumferentias, quod, &c.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

SI in ſpiralem ex prima reuolutione ortam incidant duę lineæ à puncto, quod eſt initium ſpiralis, & producãtur vſq; ad circumferentiam primi circuli, eandem rationẽ inter ſe habebunt iſtæ in ſpiralem incidentes, quam arcus circuli, medij inter terminum ſpiralis, & limites linearum productarum in circumferentia factos, ſumptis in conſequentia arcubus à fine ſpiralis.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

SI in spirales in alijs reuolutionibus genitas, quam in prima incidant duę lineæ ab initio spiralis, habebunt illæ inter se eandem rationē, quam arcus circuli primi, intercepti, veluti dicitur in antecedente, cum integra circūferentia toties assumpta, quotus est vnitate minor reuolutionum numerus.



Hę duę Propositiones ostenduntur ab Archimede lib. de spir. Prop. 14. & 15.

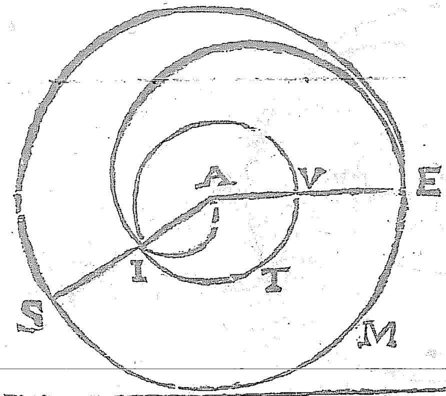
SCOLIVM.

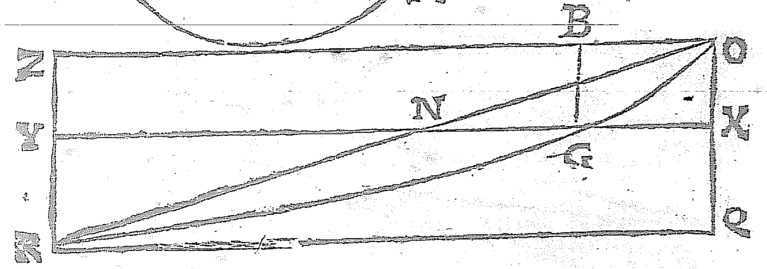
IN prima reuolutione orta sit spiralis, ACER, & RTVMG, in secunda, &, AC, AE, pertingant ad primam, AV, AM, ad secundum, erit, AC, ad, AE, vt circumferentia, RSO, ad, RSN, AV, verò ad, AM, erit vt circumferentia tota, RNOS, cum, RSO, ad, RNOS, totam, cum, RSON, & sic in cæteris.

THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SPatium comprehensum à spirali ex prima reuolutione orta, & prima linea, quæ initium est reuolutionis, est tertia pars primi circuli.

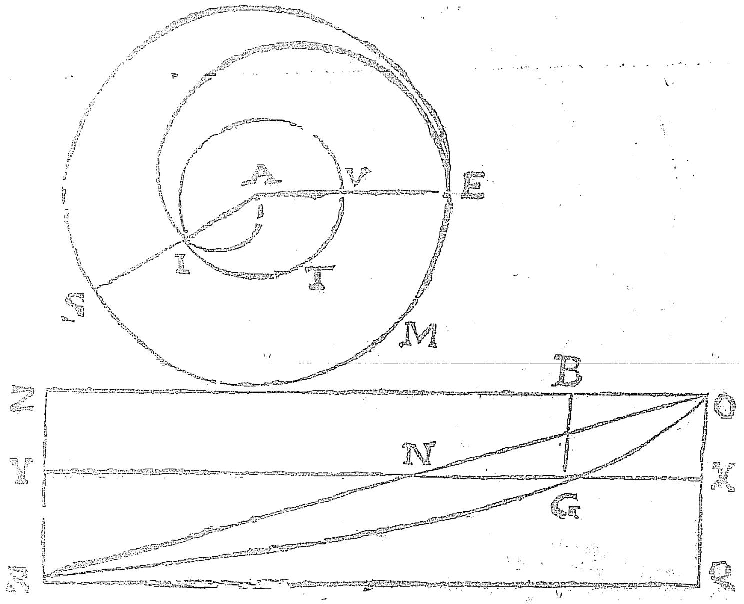
Sit spiralis in prima reuolutione genita ipsa, AIE, AE, verò reuolutionis initium, & centro, A, interuallo, AE, sit primus circulus descriptus, ESM. Dico spatium, AIE, tertiam partem esse circuli, EMS. Sumpto itaq; vtcunq; puncto, vt, V, in, AE, centro, A, interuallo, AV, circulus describatur, VIT, & iuncta, AI, producaducatur





ducatur ad, S, deinde exponatur triangulum rectangulum, OQR,
cuius latus, OQ, circa rectum, OQR, sit æquale ipsi, AE, &, QR,
circumferentiæ, SME, & compleatur rectangulum, QZ, abscin-
datur autem, OX, æqualis, AV, & per, X, ducatur, XY, parallela,
RE, secans, ZR, in, Y, &, OR, in, N, & vertice, O, per punctum, 20. l. 4.
R, describatur semiparabola, RGO, circa axem, OZ, quam secet,
YX, in, G, & per, G, agatur, GB, parallela, OQ, incidens ipsi, ZO,
in, B. Quoniam ergo quadratum, ZR, ad quadratum, BG, est 38. & Sc. 40. l. 1.
vt, ZO, ad, OB, ideò, RQ, ad, GX, erit vt quadratum, QO, ad
quadratum, OX, idest vt quadratum, EA, ad quadratum, AV, sed
sic etiam est circumferentia, ESM, ad circumferentiam, ITV, etenim ad eam habet rationem compositam ex ratione circumferē-
tiæ, ESM, ad circumferentiam, IVT, idest ex ea, quam habet, EA, C. Cor. 2.
ad, AV, & ex ratione circumferentiæ, IVT, ad circumferentiam, 3. huius.
ITV, idest circumferentiæ, MSE, ad circumferentiam, SME, idest 7. huius.
ex ratione, EA, ad, AI, vel ad, AV, duæ verò rationes, EA, ad, A
V, componunt rationem quadrati, EA, ad quadratum, AV, ergo E 23. Sex. Elem.

cir-



circumferentia, MSE, ad circumferentiam, ITV, est vt quadratũ EA, ad quadratum, AV, ideſt vt, RQ, ad, XG, eſt autem, RQ, æqualis circumferentiæ, MSE, ergo &, GX, circumferentiæ, ITV, æqualis erit, & ſic oſtendemus quamlibet circumferentiam ipſi A, concentricam, & interceptam inter ſpiralem, AIE, & rectam AE, tamen extra ſpatium helicum, AIE, adæquari ductæ in trilineo, OGRQ, ipſi, RQ, ductæ parallelæ, quæ nempè abſcindunt verſus puncta, O, A, ipſarum, OQ, AE, partes ęquales, & quia, OQ, AE, ſupponuntur æquales, ideò omnes lineę trilinei, OGRQ, regula, RQ, omnibus circumferentijs trilinei recta, AE, ſpirali, AIE, & circũferentia, MSE, cõprehenſi æquales erunt. Similiter, quia eſt, RQ, ad, NX, vt, QO, ad, OX, vel, EA, ad, AV, vel circũferentia, MSE, ad, TIV, æquatur autem, RQ, ipſi, MSE, ergo, NX, æquatur circumferentiæ, TIV, & ſic oſtendemus omnes lineas trianguli, ORQ, adæquari omnibus circumferentijs circuli, MSE, ergo vt trianguli, ORQ, omnes lineæ ad omnes lineas trilinei, OGRQ,
3. l. vel vt triangulum, ORQ, ad trilineum, OGRQ, ita omnes circum-

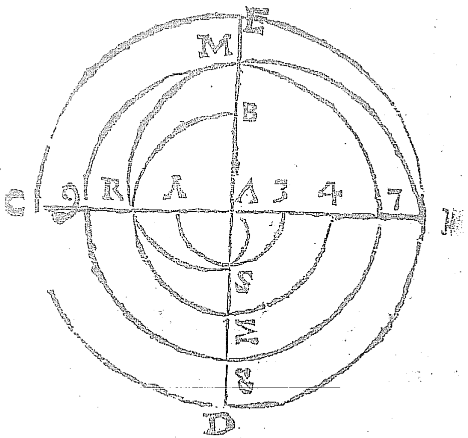
circumferentiæ circuli, MSE, erunt ad omnes circumferentias fi-
guræ ſpirali, AIE, recta, AE, & circumferentia, MSE, concluſæ,
& per conuerſionem rationis triangulum, ORQ, vel, OZR, ad fi-
guram, OGR, erit vt omnes circumferentiæ circuli, MSE, ad om-
nes circumferentias ſpatij helici, AIE, ideſt vt circulus ad ſpatium,
AIE, (quia curua, AIE, eſt talis conditionis, qualem poſtulat Prop. 1. l. 4.
6. vt elicitur ex Prop. 7. huius) cum verò ſemiparabola, OGRZ,
ſit ſexquitertia trianguli, OZR, vnde diuidendo figura, OGR, ſit
tertia pars trianguli, OZR, ideò, & ſpatium helicum, AIE, tertia
pars erit circuli, MSE, quod demonſtrare oportebat.

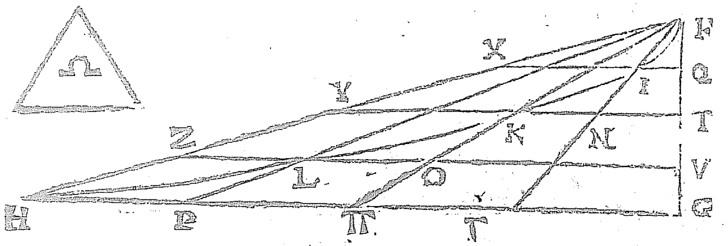
SCHOLIVM.

HVcuſq; per methodum indiuiſibilium etiam in hoc Libro libuit procedere, vt innoteſceret nos poſſe, quæ Archimedes oſtendit Lib. de Spiralibus, circa ſpatiorum menſuram, etiam tali artificio demonſtrare, etenim ſi quis hoc attentauerit circa ſequentes Propoſitiones, idipſum obtineri poſſe facilè animaduertet, veruntamen hoc arbitrio, ac iudicio Lectoris relinquendo, placuit etiam ſtylo veteri, aliter tamen ab Archimede, eaſdem propoſitiones demonſtrare.

Præfatæ Propoſ. alia demonſtratio.

SIt alia ſpiralis ex prima reuolutione orta, ASRMB, AB, verò
initium reuolutionis, & centro, A, interuallo, AB, ſit primus
circulus deſcriptus, ECDB, deinde exponatur triangulus, FHG,
rectum habens angulum ad, G, cuius latus, FG, ſit æquale ipſi, A
B, & HG, circumferentiæ, ECDB, erit ergo triangulus, FHG, æ-
qualis circulo, ECDB, intelligatur deinde in eiuſdem trianguli 2. huius.
plano tranſire parabolam, HLF, cuius vertex ſit, F, &, HG, pa- 20. l. 4.
rallela eiuſdem axi, ad quem ipſa, GF, ſit ordinatim applicata, quę
tanget ſectionem in puncto, F. Dico igitur, FLHG, trilineum 17. Primi
æquari ſpatio reſiduo, dempto à circulo, ECDB, ſpatio helico ſub Conic.
ſpirali, ASRMB, &, AB, ſi enim non eſt illi æquale, erit eodem, Defi. 3.
vel maius, vel minus, ſit primò maius quantitate ſpatij, quod vo- huius.
cetur, Ω, rurſus diuidatur, HG, bifariam in, Π, & iungantur, FΠ,
& ſic ipſæ, ΛΠ, ΠG, diuidantur bifariam in, P, Γ, & iungantur,
PF, ΓF, ſicque ſemper fiat donec deuentum ſit, vt ad triangulum,
FΓG, quod ſit minus ſpatio, Ω, deueniemus autem, nam à ma-
gnitudine propoſita, & his, quæ relinquuntur, ſemper aufertur 1. Decimè
dimidium, ſecent autem iungentes, F, cum diuiſionum punctis cur- Elem.
uam





uam parabolæ in punctis, Γ, K, L, per quæ ipſi, HG, parallelæ ducantur, XQ, YKT, ZLV, ſecantes, FG, in punctis, Q, T, V, dico, FG, per hæc ſecari in partes æquales, nam, HG, ad, GΓ, habet rationem compoſitam ex ea, quam habet, HG, ad, IQ, &, IQ, ad, ΓG, ſed, AG, ad, IQ, eſt vt quadratum, GF, ad quadratum, FQ, &, IQ, ad, ΓG, vt, QF, ad, FG, ideſt vt quadratum, QF, ad rectangulum, QFG, ergo, HG, ad, GΓ, habebit rationem compoſitam ex ea, quam habet quadratum, GF, ad quadratum, FQ, & quadratum, FQ, ad rectangulum, QFG, quæ erit eadem ei, quam habet quadratum, GF, ad rectangulum, GFQ, ideſt ei, quam habet, GF, ad, FQ, igitur, HG, ad, GΓ, erit vt, GF, ad, FQ, eodem modo oſtendemus, HG, ad, GΠ, eſſe vt, GF, ad, FT, & HG, ad, GP, vt, GF, ad, FV, vnde, FG, diuiſa erit in partes æquales; habemus ergo ſpatio, FLHG, circumſcriptam figuram ex triangulo, FIQ, & ex trapezijs, KQ, LT, HV; compoſitam, & aliam inſcriptam ex trapezijs, PV, OT, NQ, compoſitam, & exceſſus circum-

Defin. 12. l. 1.
Coroll. 1. l. 4.
4. Sexti Elem.
5. l. 2.
Defin. 12. l. 1.
5. l. 2.

cumſcriptæ ſuper inſcriptam ſunt trapezia, HL, LK, KI, cum triangulo, IFQ, quę, quia ęquantur trapezijs, ΓV, VN, NQ, & triangulo, IFQ, (nam dicta trapezia ſunt reſidua triangulorum in ęqualibus baſibus, & altitudinibus conſtitutorum) ideſt triangulo, FΓG, ſubinde ſunt minora ſpatio, Ω, & ideo circumſcriptã ſuperat inſcriptam minori ſpatio, quam ſit, Ω, ergo trilineum, FLHG, excedit inſcriptã multò minori ſpatio, excedit autem ſpatium reſiduum circuli, ECDB, iam dictum ſpatio, Ω, ergo figura inſcripta erit maior dicto ſpatio reſiduo; quod ſerua.

Diuidatur nunc, AB, ſimiliter, ac diuiditur, FG, in punctis, 3, 4, 7, centro autem communi, A, ad diſtantiam punctorum, 3, 4, 7, deſcribantur circumferentiæ, 354, 4ΣRβ, 789M, ſecantes ſpiralem in punctis, S, R, M, per quæ tranſeant eductæ à centro, A, productæque vſque ad circumferentiam, ECDB, rectæ, AD, AC, AE, vt igitur in præhabita demonſtratione oſtendemus circumfer. 53, & rectam, IQ, inter ſe æquales eſſe, & ſimiliter circumferentiam, RΣ4, æquari rectæ, KT, &, M987, ipſi, LV, & quia, 53, circumferentia ad circumfer. Σ4, eſt, vt, 3A, ad, A4, ideſt vt, QF, ad, FT, ideſt vt, IQ, ad, NT, eſt autem ęqualis, 53, ipſi, IQ, ergo, Σ4, erit ęqualis ipſi, NT, & eſt, 34, ęqualis ipſi, QT, ergo faſcia, 53 4Σ, erit ęqualis trapezio, IQTN; eodem modo oſtendemus faſciã, R9874, æquari trapezio, KV, & faſciam, MECDB7, ęquari trapezio, PLVG, & ideo figura compoſita ex dictis faſcijs ęqualis erit figurę compoſitę ex his trapezijs inſcriptę trilineo, FLHG, eſt autem hæc figura inſcripta maior ſpatio reſiduo circuli, ECDB, ab eo dempto ſpatio ſub ſpirali, & voluta, AB, ergo figura compoſita ex dictis ſpatijs erit maior ſpatio dicto reſiduo, cui tamen eſt inſcripta, quod eſt abſurdum, non ergo trilineum, FLHG, maius eſt dicto reſiduo.

Corol. 1. 3. huius.

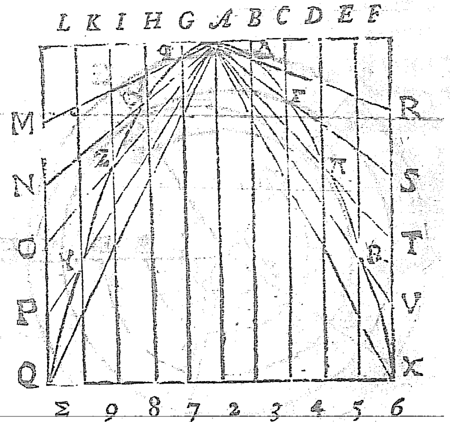
Dico neq; eſſe minus. Sit, ſi fieri poteſt, minus ſpatio eodem, Ω, ſit autem vt ſupra trilineo, FLHG, circumſcripta figura, ex trapezijs, KQ, LT, HV, & triangulo, IFk, compoſita, & alia eidem inſcripta ex trapezijs, PO, OT, NQ, ita vt earum differentia ſit minor ſpatio, Ω, igitur circumſcripta excedet trilineum, FLHG, multò minori ſpatio, ergo circumſcripta figura minor erit ſpatio reſiduo iam dicto circuli, ECDB, quod excedit trilineum, FLHG, ſpatio, Ω; quod tamen eſt abſurdum, nam ſectorem, AS3, pateret ęqualem eſſe triangulo, FIQ, faſciamque, ARΣ43, æquari oſtẽdemus trapezio, kQ, modo ſupra adhibito, & faſciam, β9874, ipſi trapezio, LT, & totam faſciam, 679C, trapezio, HV; vnde figura compoſita ex dictis faſcijs, & ſectore, AS3, erit ęqualis compoſipositæ ex dictis trapezijs, & triangulo, FIQ, quæ ostensa est esse minor spatio residuo iam dicto circuli, ECDB, & ideò figura composita ex dictis fascijs erit minor spatio residuo iam dicto, cui tamen circumscribitur, quod est absurdum, non est ergo trilineum, FLHG, minus dicto spatio residuo circuli, ECDB, & ostensum est neq; esse illo maius, ergo erit illi æquale, & triangulus, FHG, est æqualis circulo, ECDB, ergo triangulus, FHG, ad trilineum, FLHG, erit vt circulus, ECDB, ad residuum spatium ab eo dempto spatio sub spirali, A53MB, & voluta, AB, sed triangulus, FHG, est sexquialter trilinei, FLHG, ergo circulus, ECDB, erit sexquialter spatij residui iam dicti, & consequenter erit triplus spatij, quod comprehenditur sub spirali, A53MB, & voluta, AB, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM

Hinc patet eductas à vertice parabolæ ad secantem quamcunq; diametro eiusdem parallelam, parabola, ac tangente ibidem interceptam, similiter secare eandem, ac transiens per punctum curuæ parabolæ, in quo prædicta eam diuidit, eidemq; parallela, secat ipsam tangentem, ostensum enim est, ex. g. HG, ad GΓ, esse vt, GF, ad, FQ. ex quo nouus, ni fallor, ac pulcherrimus describendi parabolam elicitur modus.

SCHOLIVM.

Sit describendæ parabolæ diameter, A2, basis, QX, cui per, A, sit ducta parallela, LF, sintque, AF, AL, æquales ipsis, 2X, 2Q, æqualibus, secta autem, AF, in quotcunq; partes æquales, vt in quinque, veluti etiam, LA, in punctis, K, I, H, G, B, C, D, E, per ipsa ducantur diametro, A2, æquidistantes, KΣ, 19, H8, G7, B3, C4, D5, E6, secantes similiter basim, QX, in æquas partes in punctis, Σ, 9, 8, 7, 3, 4, 5, 6, tandem iunctis, LQ, FX, ipsæ similiter secentur ac, AF, vel, AL, scilicet in quinq; partes æquales in punctis, R, S, T, V, M, N, O, P, & ad hæc puncta ducantur ab, A, rectæ lineæ, AR, AS, AT, AV, AM, AN, AO, AP, necnon, AQ, AX, notentur autem puncta, in quibus eductæ ab, A, secant parallelas diametro, A2, ea tamē, in quibus eductæ diuidunt eas parallelas, quæ vicissim abscindunt de ipsis, AL, AF, versus, A, eandem partem, quam ab ipsis, QL, XF, abscindunt eductæ, versus tamen puncta, L, F, vt ex. g. notabimus punctum, Υ, in quo educta, AP, abscindit $\frac{4}{5}$. ipsius, QL, versus, L, sicut etiam parallela, KΣ, abscindit ab, LA, versus, A, $\frac{4}{5}$. ipsius, LA, sic ergo puncta notata erunt, Q, Υ, Z, &, Φ, Δ, Γ, Π, ℞, X, per quæ si extendatur curua linea, dico propinquissimè sic Parabolā delineari, prædicta nēpè puncta esse in Parabola, cuius diameter, A2, & basis, QX, etenim habet hæc proprietatem in præhabito Corollario declaratam, vel, vt clarius loquar, XF, ad, E℞, exempli gratia habet rationem compositam ex ratione, XF, ad, FV, idest, propter constructionem, ex ratione, FA, ad, AE, & ex ratione, VF, ad, E℞, hoc est adhuc ex ratione, FA, ad, AE, duæ autē rationes, FA, ad, AE, componunt ratione quadrati, FA, ad quadratum, AE, ergo, XF, ad, E℞, est Ut quadratum, FA, ad quadratum, AE, sed sic etiam est, FX, ad parallelam ipsi, A2, interiectam inter, AF, & Parabolam circa diametrum, A2, in basi, QX, ergo punctum, ℞, est in tali parabola: Hoc idem ostendemus eodem modo de ceteris punctis, Π, Γ, Δ, Φ, &, Z, Υ, ergo dicta puncta sunt omnia in dicta parabola. Hic quidē modus debuisset poni Lib. 4. siue in meo Tractatu de Speculo Vstorio iam in lucem edito, sed quia oritur hic ex proprietate proximè demonstrata, nec illud prius menti subuenit, propterea idipsum hic subiungere libuit.

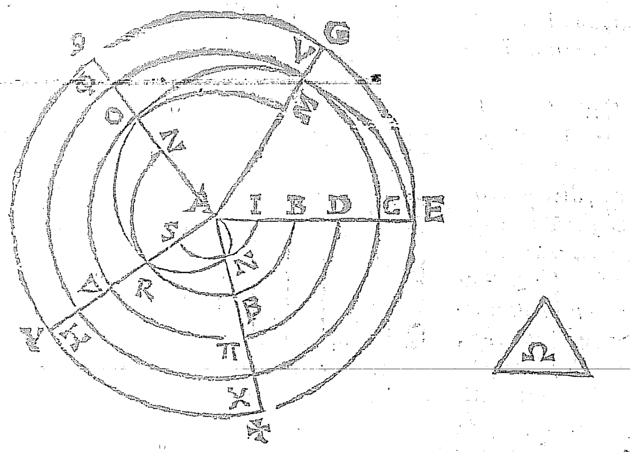


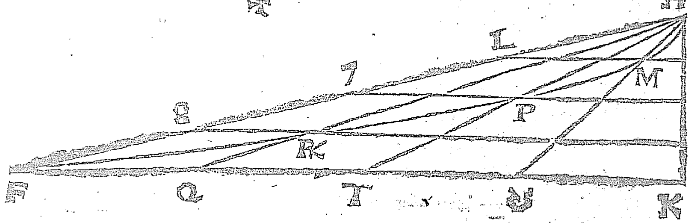
Corol. 1. l. 4.

THEOREMA X. PROPOS. X.

SI in spirali ex prima reuolutione orta sumatur punctū, quod non sit initium, nec terminus eiusdem spiralis, ab initio autem spiralis ad dictum punctum agatur recta linea, & super initio spiralis centro ad distantiam dicti pūcti describatur circulus, eiusdem portio comprehensa ducta linea, & portione eius, quæ dicitur reuolutionis initiatiua, quam abscindit circumferentia dicti circuli, & circūferentia eiusdem, quæ est ad consequentia, tripla est figuræ comprehensæ ducta linea, & portione spiralis, quæ est ad consequentia vsque ad initium spiralis.

Sit





Sit ſpiralis ex prima reuolutione orta, AOVE, primus circulus, EYG, ſumptum in ſpirali vtcumq; punctum, V, & centro, A, interuallo autem, AV, circulus deſcriptus, VHX. Dico portionẽ, AOVA, comprehenſam ſpiralis portione, AOV, & recta, AV, eſſe $\frac{1}{3}$. portionis eiuſdem circuli comprehenſæ rectis, AV, AC, & circumferentia, VHXC. Exponatur triangulus rectangulus, HkF, rectum habens angulum, FKH, cuius latus, HK, æquale ſit ipſi, AC, & kF, circumferentiæ, CXHV, erit ergo triangulus, HFk, æqualis portioni circuli, cuius baſis eſt circumferentia, CXHV; deſcripta deinde intelligatur parabola, F℞H, cuius vertex, H, quam tangat, KH, in, H, &, FK, ſit axi eiuſdem æquidiſtans. Dico trilineum, H℞Fk, eſſe æqualem ſpatio circumferentia, VHXC, ſpirali, VOA, & recta, AC, contento (quod ſpatium breuitatis cauſa dicatur reſiduum portionis circuli, VHC,) ſi enim non, erit eo maius, vel minus, ſit primò maius, & vt in antecedenti trilineo, H℞Fk, figura circumſcripta intelligatur ex triangulo, HM3, & ex trapezijs, P3, ℞4, F6, compoſita, & alia inſcripta ex trapezijs, M4,

hius. re.l.4.

M4, P6, ℞k, pariter compoſita, ita vt circumſcripta ſuperet inſcriptam minori ſpatio, quam ſit differentia dictarum figurarum (quę differentia ſit ſpatium, Ω,) igitur trilineum, H℞FK, minori quãtitate ſuperabit figuram inſcriptam, quam ſpatium reſiduum portionis circuli, VHC, ergo figura inſcripta erit maior dicto reſiduo, quod eſt abſurdum, nam ſi, AC, diuidamus ſimiliter, vt, KH, in punctis, IBD, & deſcripſerimus per eadem puncta ſuper centro, A, circumferentias, INS, BRZ, DΠOΣ, oſtendemus, vt in antecedenti figuram compoſitam ex faſcijs, IPβ, BDΔ, DCXΦ, eſſe æqualem figuræ inſcriptæ trilineo, H℞Fk, & conſequenter eſſe maiorem ſpatio reſiduo portionis circuli, VHC, cui tamen inſcribitur, quod eſt abſurdum.

Sit nunc trilineum, H℞Fk, minus eodem, Ω, dicto reſiduo, & cætera, vt prius constructa, quia ergo circumſcripta figura ſuperat inſcriptã minori quantitate, quam ſit, Ω, ſuperabit ipſum trilineũ, H℞FK, multò minori quantitate, ergo figura circumſcripta minor erit ſpatio reſiduo portionis circuli, VHC, oſtendemus autem, vt ſupra figuram compoſitam ex ſectore, ANI, & ex faſcijs, IBR, BDO, DCV, eſſe æqualem figuræ circumſcriptæ trilineo, H℞Fk, ergo erit minor ſpatio reſiduò iam dicto, cui tamen circunſcribitur quod eſt abſurdum, trilineum ergo, H℞Fk, neq; maius, neq; minus eſt ſpatio reſiduo iam dicto, ergo illi æquale, ſicut triangulus, HFK, eſt æqualis portioni circuli, cuius baſis eſt circumferentia, CHV, ſed triangulus, HFk, eſt ſexquialter trilinei, H℞FK, ergo talis portio eſt ſexquialtera ſpatij reſidui iam dicti, ergo eſt tripla ſpatij, quod ſpirali, AROV, & recta, AV, continetur, quod erat oſtendendum.

Elicitur ex prima l. 4.

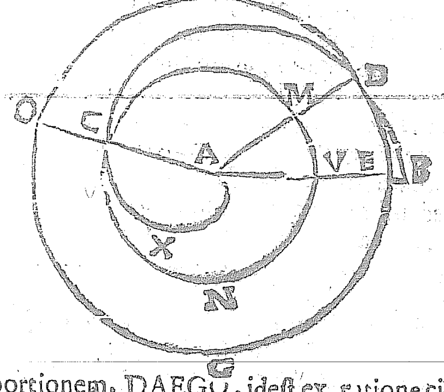
THEOREMA XI. PROPOS. XI.

SI ab initio ſpiralis in prima reuolutione ortæ educantur rectæ lineæ vtcumque ad ipſam ſpiralem terminãtes, ſpatia ſub portionibus ſpiralis abſciſsis per eductas verſus initium, erunt vt cubi earundem eductarum.

Sit ſpiralis in prima reuolutione orta, ACDB, ipſa, AB, reuoluta, & ſpiralis initium, A, à quo ad ipſam ſpiralem terminantes ſint eductæ vtcumq; AC, AD. Dico ſpatium ſub portione ſpiralis, AXC, & educta, AC, ad ſpatium ſub portione ſpiralis, AXCD, & educta, AD, eſſe vt cubum, AC, ad cubum, AD. Centro igitur, A, interuallis, C, D, ſint deſcripti circuli, CMVN, DGE, & ſit pro-

producta, AC, vſq; ad circumferentiam circuli, DG, cui incidat in, O, portio igitur circuli, CAVN, ad portionem circuli, DAEGO, habet rationem compoſitã ex ea, quam habet portio, CAVN, ad portionem, OAEG, ideſt ex ratione quadrati, VA, ad quadratum, AE, & ex ratione portionis, OAEG, ad portionem, DAEGO, ideſt ex ratione circumferentiæ, EGO, ad circumferentiam, EGD, ideſt ex ratione, VA, ad, AE, duæ autem rationes quadrati, VA, ad quadratum, AE, & ipſius, VA, ad, AE, componunt rationem cubi, VA, ad cubum, AE, ergo portio, CAVN, ad portionem, DAEGO, erit vt cubus, VA, ad cubum, AE, ſunt autem ſpatia, AXC, AXCD, tertiæ partes dictarum portionum, ergo ſpatium, AXC, ad ſpatium, AXCD, erit vt cubus, VA, ad cubum, AE, quod erat oſtendendum.

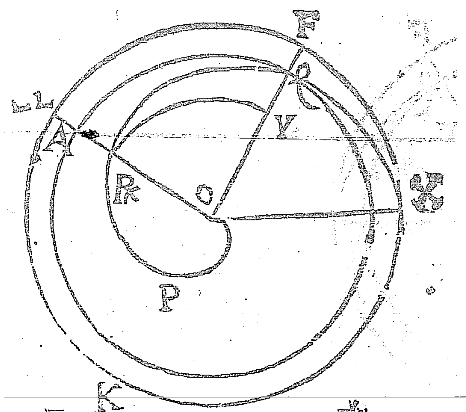
Defin. 12. l. 1.
Coroll. 2. 3. huius.
33. Sexti. Elem.
7. huius.
Ex antec.

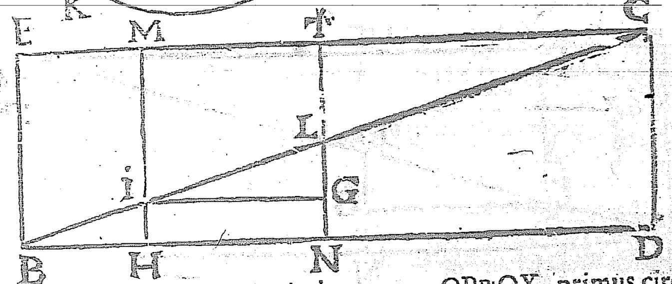


THEOREMA XII. PROPOS. XII.

COmpræhenſum ſpatium ſub ſpirali, quæ eſt minor ea, quæ ſub prima reuolutione fit, nec habet terminum initium ſpiralis, & rectis, quæ à terminis ipſius in ſpiralis initium ducuntur, ad ſectorem habentem radium æqualem maiori earum, quæ à termino ad initium ſpiralis ducuntur, arcum verò, qui intercipitur inter duas rectas ſecundum eaſdem partes ſpiralis, habet eandem rationem, quam rectangulum compræhenſum ſub rectis à terminis in principium ſpiralis ductis, vna cum ⅓. quadrati exceſſus, quo maior dictarum linearum ſuperat minorẽ, ad quadratum maioris linearum à terminis ad initium ſpiralis coniũctarum.

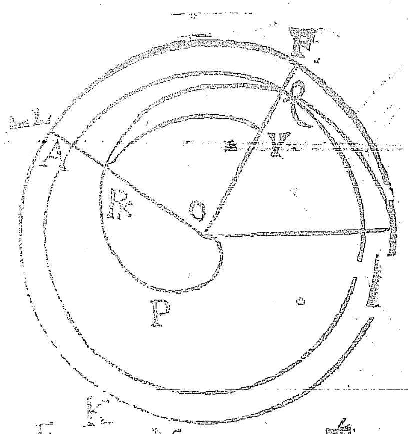
Sit

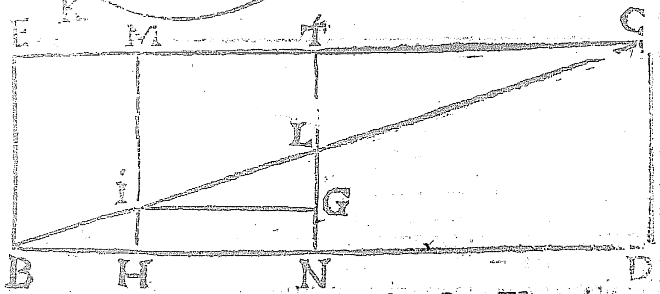




Sit ſpiralis ex prima reuolutione orta, OP℞QX, primus circulus, ΩkXF, cuius, radius, & voluta ſit, OX, ſpiralis, ℞Q, minor ea, quæ ſub prima reuolutione fit, nec habet terminum initium ſpiralis, iunctis autem, OA, OQ, & ijs vſque ad circumferentiam, FΩKX, productis, cui incidant in, Ω, F. Dico trilineum, ℞OQ, ad ſectorem, AOQ eſſe vt rectangulum, AO℞, cum ⅓. quadrati, A℞, ad quadratum, AO. Exponatur parallelogrammum rectangulum, ED, cuius latus, CD, ſit æquale ipſi, OX, &, BD, circumferentiæ, FΩKX, & ſit iuncta, BC, &, CT, ſit æqualis circumferentiæ, FX, tiæ, XkΩ, TM, circumferentiæ, ΩF, &, ME, circumferenquarum, MH, ſecet, BC, in, I, & per, I, ipſi, EC, parallela ducatur, IG, erit ergo, MC, æqualis circumferentiæ, XkΩF, & quia circumferentia, XFΩk, ad circumferentiã, FΩkX, eſt vt, XO, ad, OQ, ideſt, EC, ad, CM, eſt vt, XO, ad, OQ, eſt autem, EC, ad, CM, vt, EB, ad, MI, ergo, EB, ad, MI, erit vt, XO, ad, OQ, ſunt autem ipſæ, XO, EB, æquales, ergo etiam æquales erunt ipſæ, M I, QO,

7. huius.
4. Sexti Elem.





I, QO, sic ostendemus esse æquales ipsas, O℞, TL, quia ergo sector, AOQ, ad sectorem, ΩOF, est vt quadratum, QO, ad quadratum, OF, idest vt quadratum, IM, ad quadratum, MH, idest vt omnia quadrata, MG, regula, EB, ad omnia quadrata, MN, & sector, ΩOF, ad circulum, FK, est vt circumferentia, ΩF, ad circumferentiam, FΩKX, idest vt, MT, ad, EC, idest vt omnia quadrata, MN, regula, EB, ad omnia quadrata, ED, & circulus, ΩKXF, spatij, OXQ℞PO, triplus est, idest, se habet ad illud, vt omnia quadrata, ED, ad omnia quadrata trianguli, EBC, regula, EB, item spatium, OXQ℞P, ad spatium, OQ℞PO, est vt cubus, OX, ab cubum, OQ, idest vt cubus, EB, ad cubum, MI, idest vt omnia quadrata trianguli, EBC, ad omnia quadrata trianguli, MIC, ergo ex æquali sector, AOQ, ad spatium, OQ℞PO, erit vt omnia quadrata, MG, ad omnia quadrata trianguli, MIC, & quia spatiũ, OQ℞PO, ad spatium, ℞PO, est vt cubus, OQ, ad cubum, O℞, idest vt cubus, MI, ad cubum, TL, idest vt omnia quadrata trianguli, MIC, ad omnia quadrata trianguli, TLC, ergo sector, AOQ, ad spa-

Corol. 2. 3. huius.

10. l. 2.

9. huius. 24. l. 2.

Ex ant.

Coro. 22. l. 2.

F. Cor. 22. l. 2.

spatium, OP℞, erit vt omnia quadrata, MG, regula, MI, ad omnia quadrata trianguli, TLC, est autem idem sector, AOQ, ad spatium, OP℞Q, vt omnia quadrata, MG, ad omnia quadrata trianguli, MIC, regula eadem, ergo sector, AOQ, ad reliquum spatium, dempto spatio, OP℞, à spatio, OP℞Q, erit vt omnia quadrata, MG, regula, MI, ad omnia quadrata trapezij, MILT, sed hæc sunt, vt quadratum, GT, ad rectangulum, GTL, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, LG, ergo, conuertendo, spatium, ℞OQ, ad sectorem, AOQ, erit vt rectangulum, AO℞, cum tertia parte quadrati, A℞, ad quadratum, AO, quod erat ostendendum. 28. l. 2.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

IN eadem antecedentis figura centro, O, distantia, O℞, descripta circumferentia, ℞Y, ostendemus trilineum, A℞Q, ad trilineum, ℞QY, esse vt, ℞O, cum $\frac{1}{3}$. ℞A, ad, ℞O, cum tertia parte ipsius, ℞A.

Quia enim ex antecedente sector, AOQ, ad spatium, Q℞O, est vt quadratum, AO, ad rectangulum, AO℞, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, A℞, per conuersionem rationis, idem sector ad trilineum, A℞Q, erit vt quadratum, AO, ad rectangulum, O℞A, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, ℞A, nã dempto rectangulo, AO℞, à quadrato, AO, remanet rectangulũ, OA℞, i. rectangulũ, O℞A, cum quadrato, ℞A, à quo ablato $\frac{1}{3}$. remanet rectangulum, O℞A, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, ℞A, idest cum rectangulo sub $\frac{2}{3}$. ℞A, & sub, ℞A, quod cum rectangulo, O℞A, cõficit rectangulum sub composita ex, O℞, & $\frac{2}{3}$. ℞A, & sub, ℞A, conuertendo igitur trilineum, A℞Q, ad sectorem, AOQ, erit vt rectangulum sub composita ex, O℞, & $\frac{2}{3}$. ℞A, & sub, ℞A, ad quadratum, AO, insuper sector, AOQ, ad sectorem, ℞OY, est vt quadratum, AO, ad quadratum, O℞, & quia idem sector, AOQ, ad spatium, Q℞O, est vt quadratum, AO, ad rectangulum, AO℞, cũ $\frac{1}{3}$. quadrati, ℞A, ideò sector, AOQ, ad reliquum dempto à spatio, ℞OQ, sectore, ℞OY, idest ad trilineum, Q℞Y, erit vt quadratũ, AO, ad reliquum rectanguli, AO℞, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, ℞A, ab eo dempto quadrato, ℞O, idest ad rectangulum, O℞A, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, ℞A, erat autem trilineum, A℞Q, ad sectorem, AOQ, vt rectangulum sub composita ex, O℞, & $\frac{2}{3}$. ℞A, ad quadratum, AO, ergo ex æquali trilineum, A℞Q, ad trilineum, ℞QY, erit vt rectãgulum sub composita ex, O℞, & $\frac{2}{3}$. ℞A, & sub, ℞A, ad rectangulum, O℞A, cum $\frac{1}{3}$. parte quadrati, ℞A, idest ad rectang. sub composita

1. Secundi Elem.

Coroll. 2. 3. huius.

3. Secundi Elem.

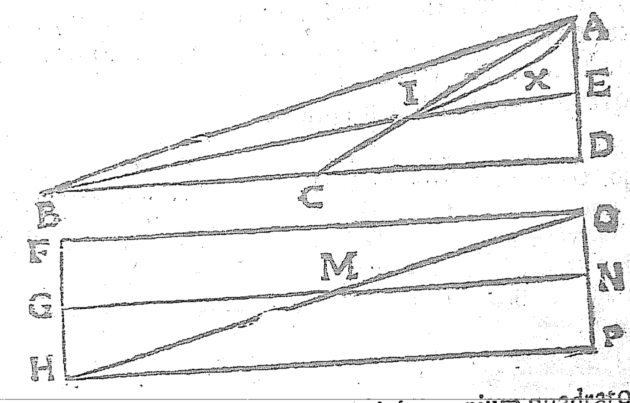
posita ex, OR, & $\frac{1}{3}$. RA, & sub, RA, & quia horum rectangulorum altitudines sunt æquales, ideò trilineum, ARQ, ad trilineum, RQY, erit vt, OR, cum $\frac{2}{3}$. RA, ad, OR, cum tertia parte, RA, quod ostendere opus erat.

THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

SI duæ rectæ lineę ducantur, quarum altera parabolam tangat, altera verò ducta axi, vel diametro eiusdem æquidistans, eandem secet, iuncto verò puncto contactus cum hoc sectionis puncto, rursus ab hoc puncto ad latus illi oppositum in facto triangulo recta producatur, quæ curuam secabit parabolæ, à quo sectionis puncto ducatur axi, vel diametro parallela quousq; incidat in tangentem: Triangulum sub eductis ad secantem à puncto contactus, ad portionem parabolæ eisdem interceptam erit, vt quadratum totius tangentis ad rectangulum sub eadem, & sub illius abscissa per eam versus punctum contactus per secundò ductam axi, vel diametro parallelam, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati differentiæ dictarum tangentium.

Sit parabola curua, BIA, quam tangat, DA, in puncto, ADB, verò axi, vel diametro eiusdem parallela eandem secet in puncto, B, iunctis verò, BA, à puncto, A, ducatur intra triangulum, ABD, ad latus oppositum, BD, vtcumq; AC, secans curuam, AIB, in, I, à quo versus tangentem, AD, ducatur, IE, axi, vel diametro iam dicto æquidistans. Dico igitur triangulum, ABC, ad trilineum, ABI, esse vt quadratum, DA, ad rectangulum, DAE, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, DE. Exponatur parallelogrammum, FP, cuius angulus, OPH, sit æqualis angulo, ADB, &, OP, æqualis ipsi, AD, &, HP, ipsi, BD, abscindatur deinde ab, OP, versus, O, ipsa, ON, æqualis ipsi, AE, & per, N, ducatur, GN, parallela ipsi, HP, secans iungentem, HO, in, M, (sint enim iuncta, H, O, puncta recta, HO,) sit verò regula, HP. Quia ergo, BD, ad, DC, est vt, DA, ad, AE, per conuersionem rationis, & conuertendo, CB, ad, BD, erit vt, ED, ad, DA, idest vt, NP, ad, PO, idest vt omnia quadrata, GP, ad omnia quadrata, FP, regula, HP, sed vt, CB, ad, BD, sic triangulus, ABC, ad triangulum, ABD, ergo vt omnia quadrata, GP, ad omnia quadrata, FP, sic erit triangulus, ABC, ad triangulum, ABD, quod serua,

In-



Insuper omnia quadrata, FP, sunt tripla omnium quadratorum 24. l. 2.
trianguli, OHP, & ideò sunt ad illa, vt triangulus, ABD, ad se- Elicitur
ctionem, AIB, cuius est triplus, quod etiam serua. Vlterius om- ex prima
nia quadrata trianguli, OHP, ad omnia quadrata trianguli, QMN, l. 4.
sunt vt cubus, PO, ad cubum, ON, idest vt cubus, DA, ad cubum,
AE, idest vt sectio, AIB, ad sectionem, AXI, (sunt enim tertiæ par- F. Cor. 22.
tes triangulorum, ABD, AIE, qui inter se sunt, vt cubi, DA, AE,) l. 2.
ergo ex æquali omnia quadrata, GP, ad omnia quadrata trianguli,
OMN, erunt vt triangulus, ABC, ad sectionem, AXI, sed omnia
quadrata, GP, ad omnia quadrata trianguli, OHP, erant vt idem
triangulum, ABC, ad sectionem, AIB, ergo omnia quadrata, G
P, ad reliquum, demptis omnibus quadratis trianguli, OMN, ab 28. l. 2.
omnibus quadratis trianguli, OHP, scilicet ad omnia quadrati tra-
pezij, MHPN, erunt vt triangulus, ABC, ad reliquum, dempta
sectione, AXI, a sectione, AIB, scilicet ad trilineum, AIB, sed om-
nia quadrata, GP, ad omnia quadrata trapezij, MHPN, sunt vt
quadratum, HP, ad rectangulum sub, HP, MN, vna cum $\frac{1}{3}$. qua-
drati, GM, idest vt quadratum, PO, ad rectangulum sub, PO, ON,
vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, PN, ergo triangulus, ABC, ad trilineum, A
BI, erit vt quadratum, PO, ad rectangulum, PON, vna cum $\frac{1}{3}$. qua-
drati, PN, idest vt quadratum, DA, ad rectangulum, DAE, vna
cum $\frac{1}{3}$. quadrati, DE, quod erat ostendendum.

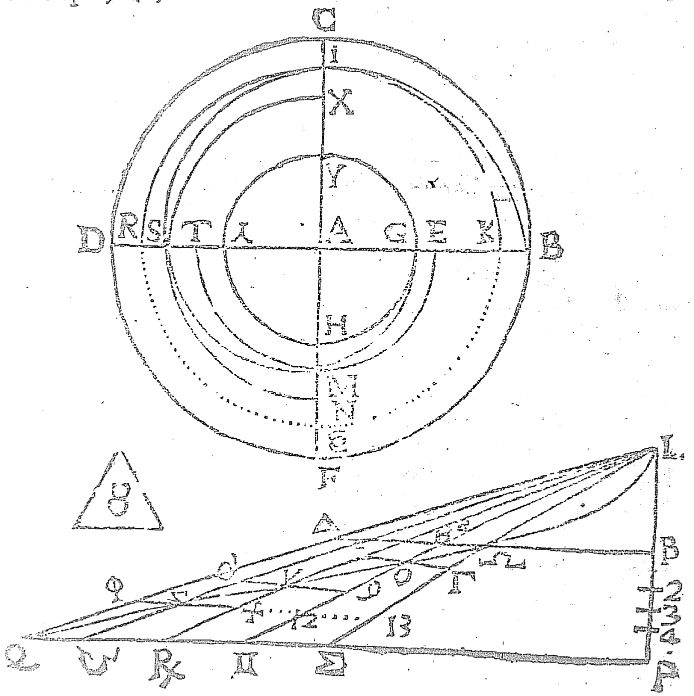
THEOREMA XV. PROPOS. XV.

SPatium sub spirali ex quacunq; reuolutione genita, præterquam ex prima, & recta eiusdem numeri cum

 spa-

ſpatio, ad circulum eiuſdem numeri, eſt vt compoſitum ex rectangulo ſub radio eiuſdem circuli, & ſub radio circuli vnitate minoris, vna cum 3. parte quad. differentiæ vtriuſq; radij, ad quadratum maioris radij prædictorum.

Sit quicunq; circulus, CDFB, ſpatium eiuſdem numeri cum eo, quod cõtinetur ſub ſpirali, GMSIB, & voluta, GB; circulus vnitate minor ipſæ, YAHG. Dico ſpatium dictum ad circulum, BCDF, eſſe vt rectangulum, BAG, cum tertia parte quadrati, GB, ad quadratum, AB. Exponatur triangulus, LPQ, rectum habens angulum ad, P, cuius latus, LP, ſit æquale ipſi, AB, & latus, PQ, æquale compoſito ex tot circumferentijs circuli, CDFB, quot radij primi circuli ſunt in, AB, deinde intra triangulum, LPQ, vertice, L, deſcripta ſit parabola, cuius curua tranſeat per, Q, quæ
20. l. 4. ſit, LΩQ, ita vt, LP, ſit eandem tangens in, L, & ſecans parallela axi ipſa, QP, abſcindatur deinde ab, LP, recta, Lβ, æqualis ipſi



AG,

AG, & per, β, ducatur, βΔ, parallela ipſi, QP, ſecans curuam parabolæ in, Ω, & iunctis, LΩ, producatur, LΩ, vſq; ad, QP, cui incidat in, Σ. Quia igitur eſt, QP, ad, PΣ, vt, PL, ad, Lβ, per conuerſionem rationis, PQ, ad, QΣ, erit vt, LP, ad, Pβ, quotuplex ergo eſt, LP, ipſius, Pβ, radio primi circuli æqualis, totuplex erit, QP, ipſius, QΣ, eſt autem etiam totuplex, QP, circumferentiæ, C DFB, ergo, QΣ, erit æqualis circumferentiæ, CDFB, eſt autem, L P, æqualis ipſi, AB, ergo triangulus, LQΣ, circulo, CDFB, æqualis erit. Dico vlterius trilineum, LQΩ, æquari ſpatio circuli, CD FB, nempè contento ſub ſpirali, GSIB, & voluta, GB, ſi enim nõ, erit eo maior, vel minor, ſit primò, maior quantitate ſpatij ſeorſim expoſiti, 8, diuiſa autem bifariam, QΣ, in, ℞, iungatur, L℞, rurſus bifariam diuidantur, Q℞, ℞Σ, in punctis, &, Π, & iungantur, &L, ΠL, & ſic ſemper fiat donec deuentum ſit ad triangulum minorem ſpatio, 8, ſit is triangulus, LΠΣ, per puncta autem, in quibus, LΠ, L℞, L&, ſecant curuam, QΩ, ſcilicet per, O, V, Z, ducantur, QP, parallelæ, 7Γ, 69, Φ✠, quæ ſi producantur ſecent, β P, in punctis, 2, 3, 4, quia ergo, Q&, &℞, ℞Π, ΠΣ, ſunt æquales facilè oſtendemus per Coroll. Prop. 9. huius, etiam, P4, 43, 32, 2β, eſſe æquales, ſimiliter facilè oſtendemus, trapezia, QZ, ZV, V O, & triangulum, LOΓ, ſimul collecta æquari triangulo, LΠΣ, .i. eſſe minora ſpatio, 8, habemus ergo ſpatio, LQΩ, circumſcriptam figuram ex triangulis, LQ&, L✠Z, L9V, LΓO, & aliam eidem inſcriptam ex triangulis, LZ✠, LV6, LO7, LΩΣ, compoſitam, quam circumſcripta excedit minori ſpatio, quam ſit, 8, ergo trilineum, LQΩ, excedet inſcriptam multò minori ſpatio, ergo inſcripta erit maior ſpatio, GMSIB, quod eſt abſurdum, nam ſi centro, A, ſemidiametris æqualibus ipſis, L4, L3, L2, deſcribantur ſectores, vel ſectorum reſidua, AkIR, XSN, TME, habebimus ſpatio, BISMG, inſcriptam figuram ex ſectoribus, vel ſectorum reſiduis iam dictis compoſitam, & aliam circumſcriptam ex ſectoribus, vel ſectorum reſidius, BAC, IAR, SAN, MAE, compoſitam, & quia, ΣQ, ad, QP, eſt vt, βP, ad, PL, &, PQ, ad, Q&, eſt vt, L P, ad, P4, ex æquali, ΣQ, ad, Q&, erit vt, βP, ad, P4, ideſt vt GB, ad, BK, ideſt vt circumferentia, CDFB, ad circumferentiam, CB, (nam dum punctus, B, deſcribit totam circumferentiam, CDFB, punctus deſcribens ſpiralem percurrit ipſam, GB, & dum, B, deſcripſit circumferentiam, CB, idem punctus percurrit ipſam, Bk,) eſt autem, QΣ, æqualis circumferentiæ, CDFB, ergo, Q&, æqualis erit circumfer. CB, eſt verò, Q&, ad, ΦZ, vt, PL, ad, L4, ideſt vt, BA, ad, Ak, ideſt vt circumferentia, CB, ad circumferentiam, IK, ergo,

Corol. 9. huius, ad poſter demonſtr.

Iuxta 20. huius

Iuxta primo. Elem.

Iux. Cor. 1. tertiæ huius.

Corol. 9. huius, ad poſteriorem demonſt.

Elicitur ex 4. Sexti Elem.

Corol. 2. 3. huius. ergo, ⊕Z, erit æqualis circumferentiæ, IK, & eſt altitudo trianguli, L⊕Z, ideſt L4, æqualis ipſi, kA, ergo triangulus, L⊕Z, ſectori, KAI, æqualis erit. Eodem modo oſtendemus triangulum, LVB, Elicitur ex Cor. 1. 3. huius. æquari ſectori, AXS, & triangulum, LO7, ſectori, ATM, & tandem triangulum, Ab9Ω, ſectori, AHG, ergo figura inſcripta trilineo, LQΩ, æqualis erit inſcriptæ ſpatio, GMSIB, eſt autem illa maior ſpatio, GMSIB, ergo figura inſcripta ſpatio, GMSIB, erit eodem ſpatio, GMSIB, maior, quod eſt abſurdum, non ergo trilineus, LQΩ, maior eſt ſpatio, GMSIB.

Sed dico neq; eſſe minorem eodem ſpatio, GMSIB, ſi enim eſt ſit adhuc defectus ſpatium, 8, modo autem ſupra adhibito circumſcribatur trilineo, LΩQ, figura, & alia inſcribatur ex triangulis compoſita, ita vt circumſcripta ſuperet inſcriptam minori ſpatio, quam ſit, 8, deſeruiant autem nobis iam in prima parte deſcriptæ figuræ, tum intra, & extra trilineum, LΩQ, tum intra, vel extra ſpatium, GMSIB. Igitur figura circumſcripta trilineo, LΩQ, ſuperabit eundem trilineum multò minori ſpatio, quam ſit; 8, nempè quam ſpatium, GMSIB, excedat trilineum, LΩQ, ergo figura huic trilineo circumſcripta erit minor ſpatio, GMSIB, oſtendemus autem eandem ęquari figurę circumſcriptæ eidem ſpatio, GMSIB, modo ſuprapoſito, ergo figura circumſcripta ſpatio, GMSIB, erit eodem minor, quod eſt abſurdum, igitur trilineus, LΩQ, neq; eſt maior, neq; minor ſpatio, GMSIB, ergo eſt eidem æqualis, & eſt triangulus, LQΣ, æqualis circulo, CDFB, ergo circulus, CDFB, Ex ant. ad ſpatium, GMSIB, erit vt triangulus, LQΣ, ad trilineum, LQΩ, eſt autem triangulus, LQΣ, ad trilineum, LQΩ, vt quadratum, PL ad rectangulum, PLβ, vnam $\frac{1}{3}$. quadrati, Pβ, ergo circulus, CDFB, ad ſpatium, GMSIB, erit vt quadratum, PL, ad rectangulum, PLβ, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, Pβ, ideſt vt quadratum, BA, ad rectangulum, BAG, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, GB, quod erat nobis oſtendēdum.

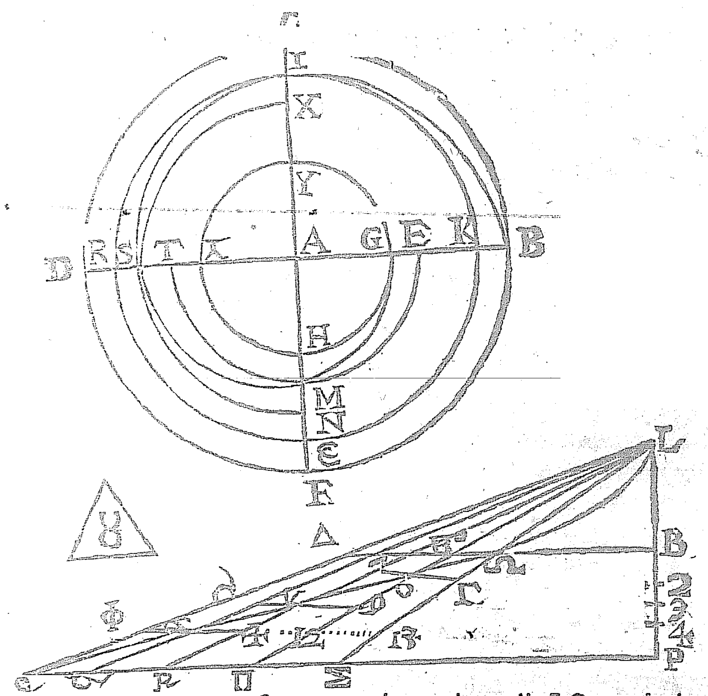
SCHOLIVM.

Poterant autem, vt in Prop. 5. & 6. huius, componi figuræ, quæ circumſcribuntur, & inſcribuntur, ex trapezijs, in quo caſu, circumſcriptio, & inſcriptio intelligi debuiſſet circa trilineum, QΩΣ, vel in ſupra demonſtratis propoſitionibus poterant dictæ figuræ ex triangulis componi, veluti in hac effectum eſt, & tunc circumſcriptio, & inſcriptio ſectionibus, FLH, in Schemate poſterioris demõſtrationis Prop. 9. & HRF, in Propoſ. 10. fieri debuiſſet intelligi, hanc tamen varietatem proſequutus ſum, vt pateat vtroq; modo nos, quod inquirimus, obtinere poſſe. THEO-

THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

SI in ſpirali ex quacunq; reuolutione genita ſumatur punctum, quod non ſit initium, nec terminus eiuſdem ſpiralis, & iungantur cum puncto, quod eſt initium reuolutionis, quo tanquam centro ad diſtantiam ſumpti puncti circulus ſit deſcriptus, huius ſector, vel ſectoris reſiduum, cuius baſis ſit circumferentia inter hoc punctum, & principium circulationis ad partes conſequentes incluſa, ad ſpatium helicum ab eodem ſectore, vel ſectoris reſiduo, apprehenſum, erit vt quadratum ſemidiametri deſcripti circuli, ad rectangulum ſub eodem, & ſub radio circuli eiuſdem numeri cum ſpirali vnitate prædicta minoris, vna cũ tertia parte quadrati exceſſus vtriuſq; radij.

Conſpiciatur antecedentis figura, in qua ſumpto vtcunq; puncto in ſpirali, GMSIB, quod ſit, I, intelligatur deſcriptus circulus, IRεK. Dico igitur ſectorem, vel eius reſiduum, cuius baſis eſt circumferentia, IRεK, ad rectas, IA, Ak, terminata, ad ſpatium ſub ſpiralis portiones, ISMG, & rectis, IA, AG, eſſe vt quadratũ, IA, ad rectangulum ſub, IA, AG, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, Gk; in ipſa enim, QΣ, iam habebus, & Σ, æqualem circumferentiæ, CDFB, terminanti ad, C, B, producatur, ⊕✠, quouſque ſecet ambas, LΠ, L Σ, vt in, 12, 13, & quia, & Σ, ad, Z, 13, eſt vt, ΣL, ad, L, 13, vel vt, PL, ad, L4, ſiue, BA, ad, AK, ſiue circumferentia, CDFB, ad circumferẽtiam, Iuxta 4. Sexti Ele. IRεK, ideò circumferentia, IRεK, erit æqualis ipſi, Z13, ſi ergo diuidamus, Z, 13, bifariam, & factas portiones adhuc bifariam, & ſic ſeper fiat, iungẽtes diuiſionum pũcta cum, L, & per puncta, in quibus iſtę iungẽtes ſecant curuã parabolę, ZΩ, ductis ipſi, Z13, parallelis, vt in antecedenti circumſcripſerimus trilineo, LZΩ, figuram, & aliã inſcripſerimus, ex triangulis compoſitam, & ſimiliter ſpatio, AIS MGA, figuram ex ſectoribus, vel eorum reſiduis compoſitam circumſcripſerimus, velut in antecedenti (quam quia antecedentis propoſitionis methodo ſimilis eſt, hic explanare mitto) & aliam inſcripſerimus, tandem oſtendemus trilineum, LZΩ, neq; maius, neq; minus eſſe ſpatio, AISMGA, & ideò illi eſſe æquale; ſimiliter oſtendemus triangulum, LZ13, ſectori, IRεK, vel ſectoris reſiduo, æqualem eſſe, nam triangulus, LCΣ, ad triangulum, LZ13, Defin. 12. l. 1. ha-



habet rationem compoſitam ex ratione trianguli, LQΣ, ad trian-
gulum, L&Σ, ideſt ex ratione, QΣ, ad, Σ&, vel ex ratione circum-
Coroll. 1. 19. l. 2. ferentiæ, CDFBC, ad circumferentiam, CDFB, quia prædictis æ-
53. Sexti Elem. quatur ideſt ex ratione circuli, CDFB, ad ſectorem, vel eius reſi-
duum, ACDFBA, & ex ratione trianguli, L&Σ, ad triangulum,
LZ13, ideſt ex ratione quadrati, PL, ad quadratum, L4, ideſt ex ra-
Coroll. 1. 19. l. 2. tione quadrati, BA, ad quadratum, AK, ideſt ex ratione ſectoris
(dicatur ſic breuitatis cauſa, ſiue ſit ſector, ſiue eius reſiduum) AC
Coroll. 2. 3. huius. DFB, ad ſectorem, AIR&KA, quæ duæ rationes componunt ratio-
nem circuli, CDFB, ad ſectorem, AIR&KA, ergo triangulus, LQ
Defin. 12. l. 1. Σ, ad triangulum, LZ13, erit vt circulus, CDFB, ad ſectorem, AI
R&KA, ſed triangulus, LQΣ, eſt æqualis circulo, CDFB, ergo triã-
Iuxta 2. huius. gulus, LZ13, ſectori, AIR&KA, æqualis erit, & eſt trilineus, LZΩ,
æqualis ſpatio, AISMGA, ergo ſector, AIR&KA, ad ſpatium, AIS
MGA, erit vt triangulus, LZ13, ad trilineum, LZΩ, .i. vt quadra-
tum, 4L, ad rectangulum ſub, 4L, Lβ, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, 4β, .i. vt qua-
24. huius. dratum, IA, ad rectangulum, ſub, IA, AG, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, GK,
quod erat oſtendendum.

THEO-

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

COmpræhenſum ſpatium ſub ſpirali, quæ eſt minor ea,
quæ ſub vna reuolutione fit, nec habet terminum
initium ſpiralis, & rectis, quæ à terminis ipſius in reuolu-
tionis initium ducuntur ad ſectorem habentem radium æ-
qualem maiori earum, quę à termino ad initium reuolutio-
nis ducitur, arcum verò, qui intercipitur inter duas rectas
ſecundum eaſdem partem ſpiralis; habet eandem rationē,
quam rectangulum compræhenſum ſub rectis à terminis
ad initium reuolutionis ductis, vna cum tertia parte qua-
drati exceſſus, quo maior dictarum linearum ſuperat mi-
norem, ad quadratum maioris earundem.

In eadem antecedentis figura ſupponamus aſſumptam, IS, por-
tionem ſpiralis in vna reuolutione genitæ, quæ non habet termi-
num initium talis ſpiralis, à cuius extremis punctis, I, S, ſint du-
ctæ ad, A, initium reuolutionis ipſæ, SA, IA, & ſit ſector, IAR,
cuius ſemidiameter ſit æqualis maiori ductarum, IA, AS, nempè
ipſi, IA. Dico ſectorem, IAR, ad trilineum, IAS, eſſe vt quadra-
tum, RA, ad rectangulum, RAS, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, RS, (vta-
mur conſtructis in eadem figura) ſector igitur, AIR&KA, eſt æqua-
lis triangulo, LZ13, vt in antecedenti oſtenſum eſt, eodem modo
probabimus triangulum, L✠13, eſſe æqualem ſectori, AR&KA,
ergo reliquus triangulus, LZ✠, erit æqualis reliquo ſectori, IAR;
ſimiliter iuxta antecedentem oſtendemus ſpatium, AISMGA, eſſe
æqualem trilineo, LZΩ, & ſpatium, ASMGA, eſſe æqualem tri- 24. huius.
lineo, LVΩ, ergo reliquum ſpatium, IAS, erit æquale trilineo, LZ
V, ergo ſector, IAR, ad trilineum, LZV, erit vt triangulus LZ✠,
ad trilineum, LZV, ideſt vt quadratum, L4, ad rectangulum ſub,
4L3, cum $\frac{1}{3}$, quadrati, 34, ideſt vt quadratum, IA, vel, RA, ad re-
ctangulum ſub, RA, AS, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, RS, quod oſtende-
re opus erat.

THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

TRilineum, IRS, ad trilineum, ISX, erit vt, SA, cum
$\frac{1}{3}$. SR, ad, SA, cum $\frac{1}{3}$. SR.

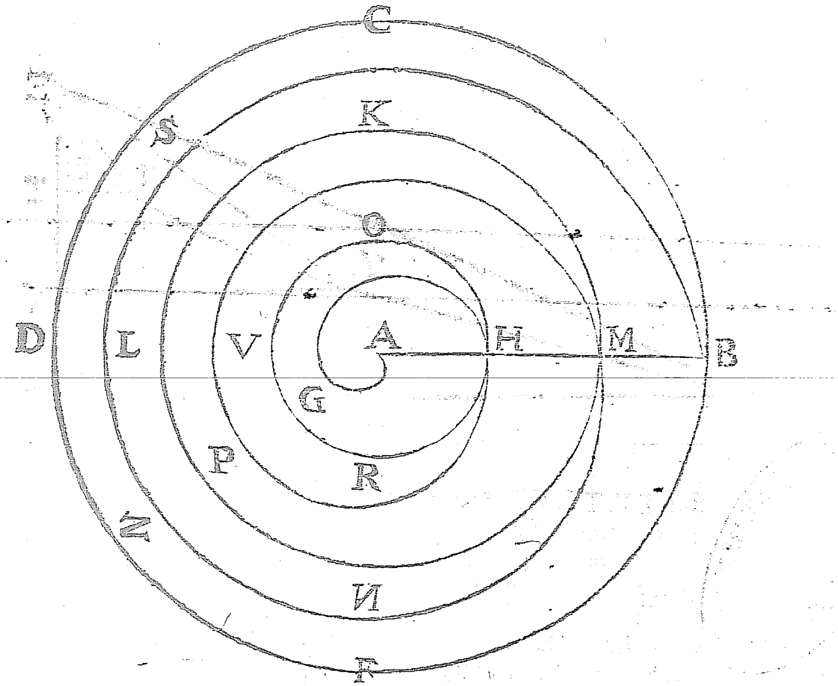
Huius

Huius demostratio non erit alia à demostratione 13. huius, propterea ibi recolatur.

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

PRimi circuli spatium helicum ad spatium helicum secundi circuli erit, vt tertia pars quadrati radij primi circuli ad rectangulum sub radio primi, & secundi circuli, vna cum tertia parte quadrati excessus radij secundi circuli super radium primi. Spatium verò secundi circuli ad spatium tertij erit, vt rectangulum sub radio eiusdem, & sub radio circuli vnitate minoris, idest primi, vna cum tertia parte quadrati differentiæ horum radiorū, ad rectangulum sub radio eiusdem, & sub radio circuli vnitate maioris, idest tertij, vna cum tertia parte quadrati differentiæ istorum radiorum, & sic deinceps in reliquis.

Exponantur super eodem centro, A, circuli, primus, HRVO, secundus, kLNM, tertius autem, CDFB, cum spatijs sub spiralibus eiusdem numeri cum circulis, primò, AGHA, secundo, HPKMH, tertio autem, MZSBM. Dico spatium primum ad secundū esse vt $\frac{1}{3}$. quadrati HA, ad rectangulum sub, HA, AM, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, HM, secundum verò ad tertium esse vt rectangulum sub, HA, AM, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, HM, ad rectangulum sub, MA, AB, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, MB. Nam spatium, AGH, ad spatium, HPkM, habet rationem composita ex ratione spatij, AGH, ad circulum, OVRH, idest ex ratione $\frac{1}{3}$. quadrati, HA, ad quadratum,
9. huius. HA, & ex ratione circuli, OVRH, ad circulum, MkLN, idest ex
Coroll. 2. ratione quadrati, HA, ad quadratum, AM, & ex ratione circuli, C
11. l. 3. DFB, ad spatium, HPMH, idest ex ratione quadrati, MA, ad re-
huius. ctangulum, MAH, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, MH, quæ rationes com-
Defin. 12. ponunt rationem $\frac{1}{3}$. quadrati, AH, ad rectangulum, MAH, cum
$\frac{1}{3}$. quadrati, HM. Item spatium, HPMH, ad spatium, MZSBM, habet rationem compositam ex ratione spatij, HPMH, ad circulum, kLNM, idest ex ratione rectanguli, HAM, cum $\frac{1}{3}$. quadrati,
huius. HM, ad quadratum, AM, & ex ratione circuli, kLNM, ad circu-
Coroll. 2. lum, CDFB, idest quadrati, MA, ad quadratum, AB, & tandem
11. l. 3. ex ratione circuli, CDFB, ad spatium, MZSBM, idest ex ratione
huius. quadrati, BA, ad rectangulum, BAM, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, MB, quæ ra-

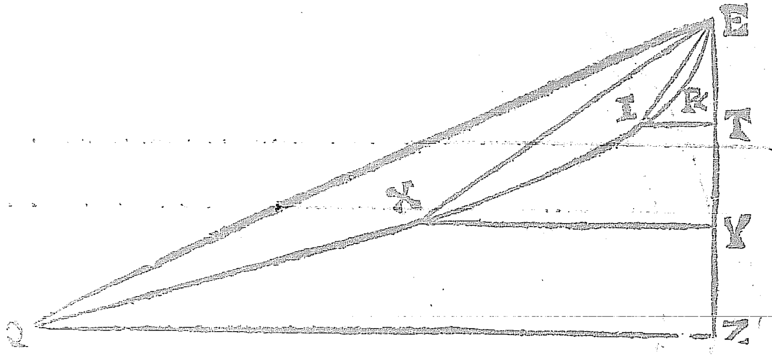


tiones componunt rationem rectanguli, HAM, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, HM, ad rectangulum, MAB, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, MB. Et sic deinceps ostendemus tertium spatium ad quartum esse, vt rectangulū, MAB, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, MB, ad rectangulum sub, BA, & radio circuli vnitate maioris, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati differentiæ horum radiorum, quæ differentia semper est æqualis radio primi circuli, quod ostendere opus erat.

ALITER.

EXponatur triangulus, ETI, habens rectum angulum ad, T, cuius latus, ET, sit æquale radio primi circuli, &, TI, eiusdē circumferentiæ, & per, EI, transeat parabolæ curua quam tangat, TE, in, E, vertice, secet verò, TI, in, I, eiusdem axi æquidistans, deinde indefinitè producta, ET, versus, T, in ea sumantur tot partes æquales ipsi, ET, quot radij primi circuli sunt in radio, AB, quę 20. l. 4.

 sint,



ſint, ET, TY, YZ, & per puncta, YZ, ducantur parabolæ axi æquidiſtantes, YX, ZQ, curuæ eiuſdem indefinitè productæ occurrentes in punctis, X, Q, & iungantur, EX, EQ. Erit igitur ſectio, EIX, ad ſectionem, ERI, vt cubus, YE, ad cubum, ET, ſic enim ſunt eorum tripla ſcilicet triangula, EIT, EXY, quod elicitur ex prima Lib. 4. &, diuidendo, trilineum, EXI, ad ſectionem, ERI, erit vt parallelepipedum ter ſub, ET, ac quadrato, TY, & ter ſub,
38. l. 2. YT, & quadrato, TE, cum cubo, TY, ad cubum, TE, vel vt horũ ſubtripla, ſcilicet, vt parallelepipedum ſemel ſub, YT, & quadrato, TE, & ſub, ET, & quadrato, TY, ſcilicet ſub, YT, & rectan-
36. l. 2. gulo, YTE, cum $\frac{1}{3}$. cubi, TY, ideſt cum parallelepipedo ſub, TY, & $\frac{1}{3}$. quadrati, TY, ad $\frac{1}{3}$. cubi, TE, ideſt ad parallelepipedum ſub, TE, vel, TY, & tertia parte quadrati, TE, nempè vt parallelepipedum ſub, TY, & quadr. ET, & rectangulo, YTE, & tertia parte quadrati, YT, quod conficit parallelepipedum ſub, YT, & rectan-
[illegible] l. 2. gulo ſub, YET, & ſub tertia parte quadrati, YT, ad parallelepipedum ſub, YT, & ſub tertia parte quadrati, TE, & quia horum parallelepipedorum altitudines ſunt eædem, ideò erunt, vt baſes
B. G. Cor. ſcilicet, vt rectangulum ſub, YET, cum tertia parte quadrati, TY,
4. gener. ad, $\frac{1}{3}$. quadrati, ET. Eodem modo oſtendemus trilineum, EQX,
34. l. 2. ad trilineum, EXI, eſſe vt exceſſus cubi, ZE, ſuper cubum, YE, ad exceſſum cubi, YE, ſuper cubum, TE, .i. vt parallelepipedum ter
[illegible] l. 2. ſub, ZY, & quadrato, YE, ter ſub EY, & quadrato, YZ, cum cubo, YZ, ad parallelepipedum ter ſub, ET, & quadrato, TY, ter ſub,

ſub, YT, & quadrato, TE, cum cubo, TY, vel vt horum ſub tripla .i. vt parallelepipedum ſub, ZY, & quadrato, YE, ſub, EY, & quadrato, YZ; .i. ſub, ZY, & rectangulo, ZYE, cum tertia parte cubi, ZY, quæ conficiunt parallelepipedum ſub, ZY, & his iunctis 35 l. 2.
ideſt rectangulo, ZYE, quadrato, YE, cum tertia parte quadrati, 33. l. 2.
ZY, ideſt ſub, ZY, & rectangulo, ZEY, cum tertia parte quadrati, ZY, ad parallelepipedum ſub, YT, & quadrato, TE, ſub, ET, & quadrato, TY, cum tertia parte cubi, TY, quæ eſſe æqualia oſtẽdemus parallelepipedo ſub, YT, & rectangulo YET, cum tertia parte quadrati, YT, igitur trilineum, EQX, ad trilineum, EXI, erit vt parallelepipedum ſub, ZY, & rectangulo, ZEY, cum tertia parte quadrati, ZY, ad parallelepipedum ſub, YT, ideſt ſub, ZY, B. G. Cor.
& ſub rectangulo, YET, cum tertia parte quadrati, TY, & quia 4. gener.
hæc parallelepipeda ſunt in eadem altitudine, ideò ſunt vt baſes, 34. l. 2.
igitur trilineum, EQX, ad trilineum, EXI, erit vt rectangulum, ZEY, cum tertia parte quadrati, YZ, ad rectangulum, YET, cum tertia parte quadrati, YT, eſt autem ſectio, ERI, æqualis ſpatio, AGH, & trilineum, EXI, ſpatio, HPMH, & trilineum, EQX, ſpatio, MZSBM, ergo ſpatium, AGH, ad ſpatium, HPMH, erit vt tertia pars quadrati, TE, ad rectangulum, TEY, cum tertia parte quadrati, TY, ideſt vt tertia pars quadrati, HA, ad rectangulum, HAM, cum tertia parte quadrati, HM. Similiter concludemus ſpatium, HPMH, ad ſpatium, MZSBM, eſſe vt rectangulum, HAM, cum tertia parte quadrati, HM, ad rectangulum, MAB, cum tertia parte quadrati, MB, quod oſtendere opus erat.

Elicitur ex 9. huius. Elicitur ex 15. huius.

COROLLARIVM.

Hinc patet ſi ducatur quædam tangens parabolam, quæ in partes quotcunq; æquales diuidatur, & per puncta diuiſionum ducantur rectæ lineæ diametro parallelæ, quouſq; incidant in curuam parabolæ, his incidentiæ punctis cum contactus puncto iunctis, ſpatium ſub prima iungente, & ſubtenſa curua parabola ad trilineum ſub prima, & ſecunda iungente, & ab illis appræhenſa curua, eſſe vt tertia pars quadrati primæ partis tangentis eſt ad rectangulum ſub prima parte, & compoſito ex prima, & ſecunda cum tertia parte quadratis ſecundæ. Similiter hoc trilineum ad trilineum ſub ſecunda, & tertia iungente, & ab illis appræhenſa curua parabolæ, eſſe vt rectangulum ſub prima, & ſub compoſito ex prima, & ſecunda parte tangentis (enumeratione ſemper à puncto contactus incepta) vna cum tertia parte quadrati ſecunda ad rectangulum ſub compoſita ex prima,

&

& secunda. & sub composito ex prima, secunda, & tertia parte,
vna cum tertia parte quadrati tertiæ partis, & sic trilinea deinceps
sequentia esse, vt hæc rectangula deinceps sequentia cum tertia parte
dictorum quadratorum, eodem enim modo supra adhibito hoc ostende-
tur. Quotiescunq; autem tangens sit æqualis radio circuli spiralium
alicuius numeri veluti fuit, EZ, æqualis ipsi, AB, & diuidatur in tot
partes æquales, in quot radius talis circuli diuiditur à circumferen-
tiis inferiorum circulorum, tunc nedum in parabola dicta spatia se
habent, vt dictum est, sed etiam sunt æqualia spatijs dictorum circu-
lorum, primum nempè primo, secundum secundo, & sic deinceps, à
puncto contactus parabolæ dictorum spatiorum enumeratione facta,
quod est admirabile, hæc autem ex supradictis manifesta sunt.

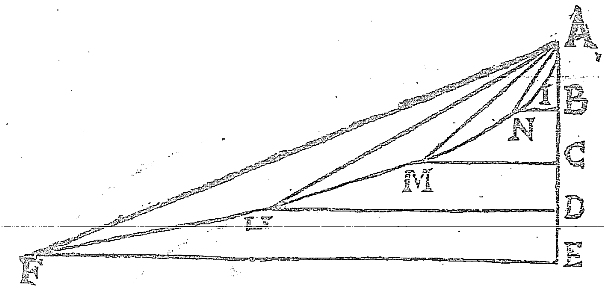
THEOREMA XX. PROPOS. XX.

SI parabolam tetigerit recta linea, quæ diuidatur in quotcunq; partes æquales, per puncta autem diuisionum, & extremum ducantur rectæ lineæ diametro parabolæ, æquidistantes, quousq; in eiusdem curuam incidant, iungantur autem puncta incidentiæ cum puncto cõtactus. Spatium sub prima iungente, & subtensa ab eadem curua erit septima pars spatij sub prima, & secunda iungente, & ab ijs appræhensa curua compræhensi. Hoc verò ad spatium sub secunda, & tertia iungente, & appræhensa curua, erit vt 7. ad 19 Hoc autem ad spatium sub tertia, & quarta iungente & ab ijs inclusa curua, vt 19. ad 37. & sic deinceps, prout indicat apposita numerorum series.

Sit tangens parabolam, AHF, ipsa, AE, diuisa in quotcumq; partes æquales, AB, BC, CD, DE, ductis autem à punctis, B, C, D, E, diametro parallelis, quousq; incidant curuæ, AHF, ipsæ, BN, CM, DH, EF, iungantur puncta incidentiæ, quæ sint, F, H, M, N, cum puncto, A, &, AN, dicatur prima iungens, AM, secunda, AH, tertia, & sic deinceps. Dico spatium sub, AN, & ab ea subtensa curua, esse ad spatium sub, NA, AM, & curua, MN, idest ad trilineum, AMN, vt 1. ad 7. hoc verò ad trilineum, AHM, vt
Ex Coro. antec. 7. ad 19. & sic deinceps, prout indicat opposita numerorum series se habere trilinea deinceps subsequentia. Est enim spatium, AIN, ad trilineum, AMN, vt $\frac{1}{3}$. quadrati, AB, ad rectangulum, CAB,

cum

Series spatiorum	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Series numerorum	1.	7.	19.	37.	61.	91.	127.



cum $\frac{1}{3}$. quadrati, CB, si ergo, AB, statuatur 3. erit, AC, 6. rectangulum, CAB, 18. tertia pars quadrati, BC, erit 3. quæ iuncta ipsi 18. efficit 21. erit ergo qualium partium quadratum, AB, est 9. rectangulum, CAB, cum tertia parte quadrati, BC, 21. & tertia pars quadrati, AB, est 3. est igitur spatium, AIN, ad trilineum, AMN, vt 3. ad 21. idest vt 1. ad 7. Eodem modo reperiemus trilineum, ANM, ad, AMH, esse vt 7. ad 19. & hoc ad trilineum, AHF, vt 19. ad 37. & sic deinceps, prout indicat series numerorum supra posita, quod demonstrandum erat.

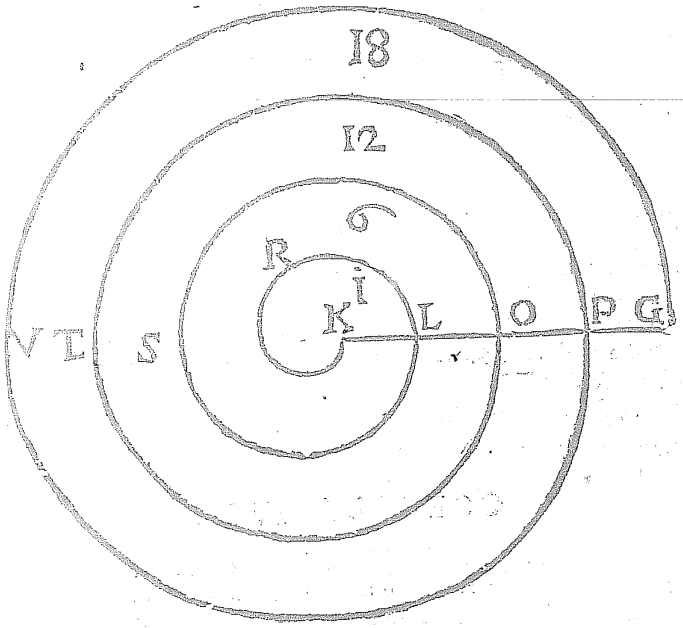
COROLLARIVM.

HInc patet si exposita sint spirales in quotcunque reuolutionibus genitæ, initio circulationis existente in, K, sint autem volutæ ipsæ, KL, LO, OP, PG, & spirales eodem ordine procedentes, KRL, ESO, OTP, PVG, quod si, KG, fuerit æqualis ipsi AE, & diuisa in punctis, L, O, P, prout diuiditur, AE, in punctis, B, C, D, spatium, KRL, Elicitur ex 9. huius.
erit æquale spatio, AIN, &, LSO, trilineo, AMN, &, OTP, trili- Elicitur 15. huius.
neo, AMH, & tãdem, PVG, trilineo, AHF, & sic deinceps, vnde etiam hæc spatia se habebunt, prout indicat suprapofita series nume-

Secunda series num.	1.	6.	12.	18.	24.	30.	36.

rorum.

rorum. Si autem primum spatium subtrahatur à secundo, secundum à tertio, tertium à quarto, & sic deinceps, habebimus hanc numerorum secundum seriem indicantem rationem primi spatij ad fasciam sequentem, & huius ad fasciam sequentem, & sic deinceps, in qua patet primum spatium esse ½. fasciæ sequentis, secundam verò fasciam primæ esse duplam, tertiam eiusdem triplam, quartam quadruplam, & sic deinceps, secundum numerorum continuum incrementum, quæ inuentis ab Archimede esse conformia eiusdem de Spiralibus librum perlegenti compertum fiet.



SCHOLIVM.

Hæc libuit apponere, tum quia adhibita methodus ab Archimedea diuersa est, tum etiam, vt admirabilem connexionem, &, vt ita dicam parabolici, ac helici spatij, affinitatem, talia speculanti, puto, non aspernendam, ob oculos ponerem; quibus, & sequentia subne-

subnectere non inutile mihi visum fuit. Hoc autem tantum circa præfatas demonstrationes dicam, quod licet in Prop. 12. & 14. indiuisibilibus, nempè omnibus quadratis parallelogrammorum, quæ ibi describuntur, vsus fuerim, tamen etiam modo consueto potuissent demonstrari, si ex. g. vice omnium quadratorum parallelogrammi, ED, regula, EB, ibi assumpta, vsus fuissem parallelepipedo sub altitudine, DB, basi autem quadrato, EB, vel pro omnibus quadratis trianguli, CBE, regula eadem, EB, vsus essem pyramide sub altitudine, CE, basi eodem quadrato, EB, etenim similiter demonstratio absolui potuisset, hac omnium quadratorum parallelogrammorum ibidem consideratorum dimissa congerie, & substitutis parallelepipedis, vel pyramidibus, aut earum frustis, vbi opus erat. Hæc inuenire volui, vt prædicta omnia stylo veteri demonstrabilia esse, etiam aliter ab Archimede pateſiat.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

Si exponatur series spiralium, & circulorum deinceps à primis, in spatijs verò sub spiralibus, & volutis, cylindrici, & conici in eadem altitudiue stantes intelligantur constituti tamquam in basibus, similiter & in circulis constituti esse cylindri, & coni intelligantur. Cylindri inter se, & cylindrici pariter inter se, siue ad cylindros comparati, siue coni inter se, & conici inter se siue ad conos comparati eandem rationem, quam bases habebunt.

Patet hæc propositio, nam cylindrici, & conici in eadem altitudine constituti sunt inter se, vt bases; sunt autem prædicta solida per constructionem in eadem altitudine posita, ergo erunt inter se, vt ipsæ bases; Vocentur autem Cylindri, & Cylindrici, necnon Conici eiusdem numeri cum spatijs, quibus insistunt .i. primus cylindrus, vel conus, qui est in primo circulo, secundus cylindrus, vel conus, qui est in secundo circulo tamquam in basi; primus cylindricus, vel conicus, qui est in spatio helico primi circuli tamquam in basi, secundus cylindricus, vel conicus, qui est in spatio secundi circuli, & sic deinceps. B. G. H. Coroll. 4. gener. 34. l. 2.

COROLLARIVM.

ET quia in suprapositis Propositionibus basium prædictorum solidorum ratio fuit adinuenta, ideò eandem pro dictis solidis rationem inde colligemus.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

PRimus cylindrus nonuplus est primi conici.

Hæc Propositio pariter manifesta est, nam primus cylindrus ad primum cylindricum est, vt primus circulus ad suum spatium idest in ratione tripla, primus verò cylindricus ad primum conicũ est in ratione tripla, quia sunt in eadem basi, quod est spatium primi circuli, & in eadem altitudine, & ideò primus cylindrus ad primum conicum est in ratione nonupla, quæ ex duabus triplis conflatur. — *Margin:* C. Cor. 4. gener. 34. l. 2.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

SEcundus cylindrus ad secundum conicum est, vt triplum quadrati radij secundi circuli, ad rectangulum sub radio eiusdem secundi, & radio primi circuli, vna cũ tertia parte quadrati differentiæ eorundem radiorum.

Secundus enim cylindrus ad secundum cylindricum est, vt secũdus circulus ad suum spatium idest vt quadratum radij secundi circuli ad rectangulum sub radio eiusdem, & sub radio primi vna cũ tertia parte quadrati differentiæ eorundem radiorum, secundus verò cylindricus triplus est conici secundi, quoniam in eadem basi, & altitudine cum eo constituitur, ergo est ad illum, vt dictum rectangulum sub radijs primi, & secundi circuli, vna cum tertia parte quadrati differentiæ eorundem ad horum coniunctorum tertiã partem, & ex æquali secundus cylindrus ad secundum conicum erit, vt quadratum radij primi circuli ad tertiam partem rectanguli sub radijs primi, & secundi circuli, cum nona parte quadrati differentiæ eorundem radiorum, idest, vt triplum quadrati radij secundi circuli ad rectangulum sub radijs primi, & secundi circuli, vna cum tertia parte quadrati differentiæ eorundem radiorum. — *Margin:* 13. huius. — 1. Coro. 4. gener. 14. l. 2.

CO-

COROLLARIVM I.

HInc patet reliquorum cylindrorum ad conicos eiusdem numeri rationem eandem esse illi, quam habet triplum quadrati radij circuli, qui est basis talis cylindri, ad rectangulum sub eodem radio, & radio circuli vnitate minoris, vna cum tertia parte quadrati differentiæ vtriusq; radij, quod eod. modo ostendetur.

COROLLARIVM II.

PAtet insuper, quod eadem methodo facilè inueniemus rationem cuiuscunq; cylindri, vel frusti cylindri, & conici, vel frusti conici, in basibus aliquibus ex iam consideratis spatijs constituti, quæ ob facilitatem dimitto; vt ad aliqua ex antecedentium librorum, & huius propositionibus constructa Problemata, siue Theoremata, speculationem nostram conuertentes, vtilitatis eximiæ, quam superius tradita doctrina, etiam ad praxim deducta, afferre potest, illustriora quædam præbeamus argumenta.

PROBLEMA I. PROPOS. XXIV.

CYlindrum, vel conum constituere æqualem datæ sphæræ, vel sphæroidi, vel eiusdem portioni.

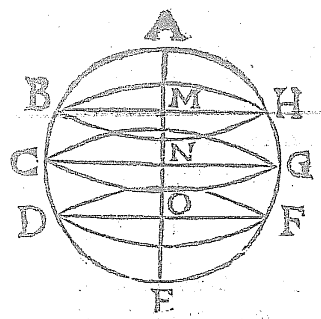
Sit sphæra, vel sphæroides, ACEG, circa diametrum, AE, oportet illi cylindrum, vel conum æqualem constituere. Exponatur cylindrus, RQ, & conus, SPQ, quorum altitudo, vt, SV, sit æqualis ipsi, AE, & basis æqualis circulo transeunti per centrum, N, qui sit, CG, rectè axem secans, seu pro sphæroide, si, AE, non sit axis, RQ, altitudinẽ habeat æqualem altitudini sphæroidis iuxta planũ, CG, assumptę, & sit in basi æquali ellipsi, CG. Erit ergo cylindrus, RQ, sexquialter sphæræ, vel sphæroidis, ACEG, & conus subduplus eiusdẽ, si igitur in eadẽ basi fiat cylindrus, cuius altitudo sit $\frac{2}{3}$ ipsius, SV, hic erit æqualis datæ sphæræ, vel spæroidi, ACEG, si verò, fiat conus altitudinis duplæ ipsius, VS, in eadem pariter basi, ille eidẽ sphæræ, vel sphæroidi æqualis erit, coni enim, & cylindri, in eadẽ basi constituti sunt, vt altitudines. — *Margin:* Coroll. 1. 34. l. 3.

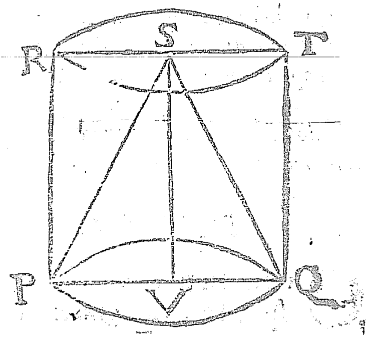
Sit rursus constituendus cylindrus, vel conus, æqualis eiusdem sphæræ, vel spræroidis, portioni, BAH, vel, DAF, supponatur nũc ergo cylindrus, RQ, cuius basis sit æqualis circulo, vel ellipsi, DF, altitudo verò, SV, æqualis ipsi, AO, seu altitudini portionis, ADF, — *Margin:* C. G. H. Coroll. 4. gener. 34. l. 2.

 iuxta

iuxta planum, DF, assumptæ, erit igitur hic cylindrus ad portionem, DAF, vt, OE, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. OE, & $\frac{1}{6}$. OA, hanc autem rationem habeat, SV, ad aliam altitudinem, erit ergo cylindrus, RQ, ad cylindrum altitudinis inuentæ, & in eadem basi, PQ, constitutum, vt, OE, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. OE, & $\frac{1}{6}$. OA, .i. vt cylindrus, RQ, ad portionem, DAF, igitur inuentus cylindrus erit æqualis portioni, DAF. Triplicetur nunc altitudo inuenti cylindri, & fiat conus talis altitudinis, in eadem cum eo basi, hic igitur conus erit æqualis inuento cylindro, & subinde portioni, DAF. Eódem modo inueniemus cylindrum, vel conum æqualem portioni, BAH.

Coroll.1. 34.l.3.



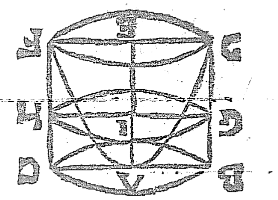


PROBLEMA II. PROPOS. XXV.

SOlido quocunq; in eadem basi, & altitudine cum cylindro constituto, ad quod cylindrus notam rationẽ habeat, cylindrum, & conum, inuenire, æqualem dato solido.

Sit solidum quodcunque, DAF, ad quod cylindrus, BF, in eadem basi, DF, & eadẽ altitudine cum eodẽ cõstitutus, habeat notam rationem. Oportet cylindrum inuenire, & conum, æqualem dato solido. Fiat ergo, vt cylindrus, BF, ad solidum, DAF, sic altitudo, quæ sit, AE, ad altitudinem, EI, & per, I, ducatur planum producẽs in cylindro, BF, circulum, GK, constituensque cylindrum, GF, igitur, vt, AE, ad, EI, sic erit cylindrus, BF, ad cylindrum, GF, & sic

sic cylindrus, BF, ad solidum, DAF, vnde cylindrus, GF, erit æqualis solido, DAF. Rursus triplicetur altitudo, EI, & fiat conus eiusdem altitudinis in basi, DF, hic igitur conus erit æqualis cylindro, GF, & subinde solido, DAF, quod inuenire opus erat.



COROLLARIVM I.

HInc patet nos etiam posse inuenire cylindrum, & conum, nedũ æqualem dicto solido, sed qui ad ipsum habeat datam rationem, si enim altitudo inuenti cylindri, vel coni æqualis dicto solido, fiat id aliam altitudinem in data ratione, tamen conuersa, & harum altatudinum vltimò inuentarum in eisdem basibus cum prædictis fiant cylindrus, & conus, habebunt isti ad dictum solidum datam rationem, vt facilè apparet.

COROLL. II. SECTIO I. A

HInc etiam patet cylindrum in basi apicis sphæralis, vel sphæroidalis, constitutum cuius altitudo ad altitudinem eiusdem apicis sit, vt, 2. ad 21. esse æqualem eidem apici. Corò.21. 34.l.3.

SECTIO II. B

VLterius habetur quoq; cylindrum, ad cuius altitudinem altitudo tympani sphæralis, vel sphæroidalis sit, vt semidiameter basis tympani ad reliquum, dempta ab eadem recta linea, ad quam dimidia secundæ diametri circuli, vel ellipsis sit, vt circulus ad quadratum, cui circumscribitur simul cum excessu, quo dicta linea excedit $\frac{2}{3}$. tertiæ proportionalis semidiametri basis tympani, & dimidiæ secundæ diametri dicti circuli, vel ellipsis, esse æqualem dato tympano sphærali, vel sphæroidali, si sit in basi eiusdem tympani. Corò.12 34.l.3.

SECTIO III. C

ET cylindrum, ad cuius altitudinem, altitudo anuli stricti circularis, vel elliptici, sit vt quadratum ad circulum, cui circumscribitur, in basi existentem circulo, cuius radius sit æqualis secundæ

dia-

diametro circuli, vel ellipsis, quæ reuoluitur, esse æqualem dicto anulo stricto. Consimiliter autem inueniemus cylindrum æqualem anulo lato circulari, vel elliptico; & eius portionibus, abscissis planis ad axem reuolutionis rectis; siue cuicunq; ex figuris Corollariorum 26. 27. 28. 29. Lib. 3. Similiter inueniemus cylindrum æqualem Malo Roseo, vel Cotoneo, vel Citrij, vel Oliuæ; Conoidi Parabolico, vel hyperbolico, eiusdem frusto, Apici parabolico, Semianulo stricto, vel lato, & semibasibus strictis, medijs, vel latis, Aceruis minori, vel maiori parabolicis. Tympano hyperbolico, & portionibus eorundē supra consideratis, & cylindricis, vel conicis, qui in basibus spatijs sub spiralibus, & volutis constituuntur. Triplicatis autem altitudinibus inuentorum cylindrorum, in quibus, & eisdem basibus cum cylindris, constituantur coni, isti prædictis solidis æquales erunt, & iuxta Coroll. 1. antecedentis inueniemus pariter cylindrum, vel conum, qui ad quoduis ex prædictis solidis datam rationem habeat.

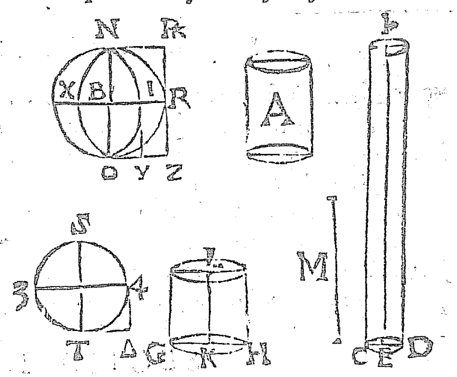
Coro. 13. 34. l. 3.

PROBLEMA III. PROPOS XXVI.

SPhæram inuenire æqualem dato cylindro. Similiter, & sphæroidem circa datum axim æqualem dato cyindro.

Sit cylindrus datus, A, oportet illi æqualem sphæram inuenire. Fiat cylindrus rectus, CFD, sexquialter cylindri, A, deinde inter, altitudinem, FE, & basis diametrū, CD, duæ mediæ continuè proportionales, iuxta methodū ab alijs traditam, inueniantur, quę sint, M, GH, descripto autem circulo circa alterā dictarū mediarum tanquam diametrum, vt circa, GH, fiat is basis cuiusdam cylindri altitudinis æqualis ipsi, GH, & sit tandem sphæra, B, circa diametrum æqualem ipsi, GH, constituta. Dico sphæram, B, esse æqualem cylindro, A. Est enim CD, ad, GH, vt, M, ad, FE, permutando, CD, ad, M, est vt, GH, vel,

Vide Dauidem Riualtum in Commé. in Arch. ad prop. 1. secundi de Sphæra, & Cylindro.



H, vel, LK, altitudo, ad, FE, vt verò, CD, ad, M, ita quadratum CD, ad quadratum, GH, vel circulus, CD, ad circulum, GH, ergo vt, LK, ad, FE, sic circulus, CD, ad circulum, GH, ergo cylindri, CFD, GLH, sunt æquales, est autem cylindrus, CFD, sexquialter cylindri, A, ergo cylindrus, GLH, erit sexquialter cylindri, A, est autem cylindrus, GLH, etiam sexquialter sphæræ circa diametrum, GH, vel illi æqualem, NO, descriptæ idest sphæræ, B, ergo sphæra, B, erit æqualis dato cylindro, A.

E. G. Coroll. 4. gene. 34. l. 2. Coroll. 1. 34. l. 3.

Sit nunc datus axis, NO, circa quem sit constituenda sphærois æqualis dato cylindro, A, si igitur sphæra circa diametrum, NO, esset æqualis dato cylindro, non posset circa hanc diametrum fieri alia sphærois ęqualis dato cylindro, sed talis sphęrois esset eadē sphera. Non sit autem ęqualis sphęra, B, cylindro, A, tunc fiat sphęra ęqualis cylindro, A, quę sit circa diametrum, ST, deinde fiat, vt, NO, ad, ST, sic quadratum, ST, ad, XI, bifariam diuisam in, B, centro, & fiat sphęrois circa diametros, NO, XI, igitur primi axes, NO, ST, reciprocè respondent secundorum axium, ST, vel, 34, XI, quadratis ergo sphęra, ST, erit ęqualis sphęroidis, NXOI, ergo sphęrois, NXOI, circa datum axim, erit ęqualis dato cylindro, A, quod erat inueniendum.

Corol. 10. Prop. 34. l. 3. sect. 4.

COROLLARIVM.

HInc colligitur cuicunq; ex solidis in antecedenti, & Corollarijs eiusdem nominatis sphæram æqualem nos scire constituere, necnon sphæroidem æqualem circa datum axem, sphæramque, ac sphæroidem, quæ ad quodcunq; ex ipsis datam rationem habeat. Proposito enim ex illis quocunque solido, inuenietur primò cylindrus, qui ad ipsum datam rationem habeat, deinde fiet sphæra, vel sphærois circa datum axim, æqualis inuento cylindro, quæ subinde ad datum solidum datam rationem habebit: Et vniuersaliter patet si discamus, dato cylindro æquale solidum ex iam consideratorum genere construere, consequenter eiusmodi solidum nos scire construere, quod ad aliquod ex nominatis in antecedenti Propositione, & eiusdem Corollarijs, datam rationem habeat.

25. huius.

PROBLEMA IV. PROPOS. XXVII.

DAto cylindro apicem sphæralem æqualem constituere, vel sphæroidalem, & hunc circa datum axem.

Vtamur antecedentis figura, in qua ſupponamus dato cylindro, A, conſtituendum eſſe æqualem apicem ſphæralem, vel ſphæroidalem, & hunc circa datum axem. Exponatur autem cylindrus, FCD, qui ad cylindrum, A, ſit, vt 21. ad 1. deinde inter, C D, FE, ſumantur duæ mediæ continuè proportionales, GH, M, & fiat cylindrus altitudinis, GH, qui ſit, GLH, ac ſupponatur ipſi, LK, aſſumptam eſſe æqualem ipſam, NO, igitur ductis tangentibus circulum circa, NO, in punctis, O, R, N, quæ ſint, OZ, Z℞, ℞N, concurrentibus in Z, ℞, patet, OZ, eſſe æqualem ipſi, GK, &, ℞Z, æquatur ipſi, Lk, ergo cylindrus, qui naſceretur ex reuolutione parallelogrammi, NZ, circa manentem axem, ℞Z, eſſet æqualis cylindro, GLH, oſtendemus autem, vt in antecedenti cylindrum, GLH, eſſe æqualem cylindro, CFD, vnde patebit cylindrum genitum ex, NZ, ad cylindrum, A, eſſe vt 21. ad 1. ſed idem ad apicem, qui naſceretur ex reuolutione trilinei, OZR, circa, RZ,
Corol. 11. 34. l. 3. eſt vt 21. ad 1. nam cylindrus ex, NZ, duplus eſt cylindri ex, BZ, ergo apex genitus ex trilineo, OZR, æqualis erit cylindro, A.

Sit nunc inueniendus apex ſphæroidalis circa datum axem, RZ, vel illi æqualem, qui ſit æqualis cylindro, A, ſi ergo talis eſſet apex ſphæralis, qui ſit ex, OZR, non eſſet alius apex ſphæroidalis circa, RZ, vel illi æqualem, qui eſſet æqualis cylindro, A; ſi verò non ſit, inueniatur apex ſphæralis, vt, T△4, æqualis cylindro, A, deinde vt, RZ, ad huius facti apicis axim, 4△, ita fiat dimidij diametri baſis eiuſdem, idest, T△, quadratum ad quadratum, OY, ſiue, BI, & per, I, tranſeat ellipſis, NIO; & ducatur eandem tangens in, I, quę ſit, IY, igitur quia, RZ, ad, 4△, axim facti apicis ſphæralis eſt, vt quadratum, T△, dimidij diametri baſis, ad quadratum, OY, idest, vt circulus, qui eſt baſis facti apicis ſphæralis, T△4, ad circulum, qui eſt baſis alterius, ideò iſti apices erunt æquales: nam ſe habebunt, vt cylindri in eiſdem cum illis baſibus, & circa eoſdem axes exiſtentes, qui cylindrici erunt æquales, nam axes baſibus reciprocè reſpondet; ergo apex ſuphæroidalis, qui fiet ex, OYI, & eſt circa axim, IY, æqualem ipſi, RZ, datæ, erit æqualis cylindro, A, quæ inuenienda erant.

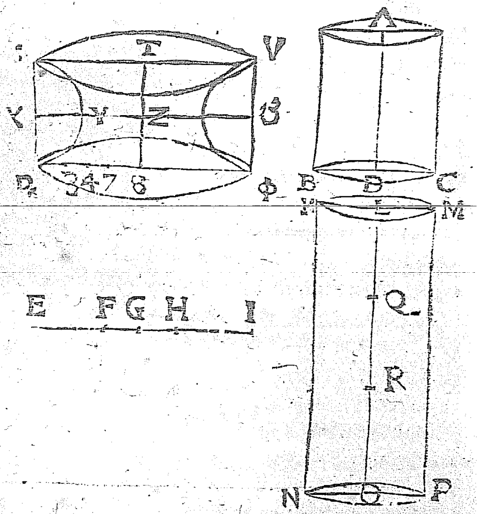
COROLLARIVM.

Patet autem, quod iuxta Corollarium antecedentis poterimus etiã inuenire apices ſpherales, vel ſphæroidales circa datum axim, ad datum quodcunq; ſolidum ex enumeratis in dicto Corollario datam ratoinem habentes.

PRO-

PROBLEMA V. PROPOS. XXVIII.

Dato cylindro tympanum ſphærale eidem æquale cõſtituere, cuius axis ſemidiametro baſis ſit æqualis.



Sit datus cylindrus, ABC, cuius axis, AD, baſis, BC, oportet illi æquale tympanũ ſphærale conſtituere, cuius axis ſemidiametro baſis ſit æqualis. Vt hoc fiat exponatur recta linea terminata quæcũque, EI, quæ ſit bifariã ſecta in, G, & vt quad. circulo cuicunq; circũſcriptum ad eundem circulum, ita fiat, GE, ad, EF, ſumatur deinde, FH, quæ ſit exceſſus, quo, FE, ſuperat ⅔. tertiæ proportionalis duarum, IE, EG, deinde vt, HI, ad, IE, ita fiat, AD, ad, LO, altitudinem alterius cylindri in baſi, NP, æquali ipſi, BC, exiſtentis, & tandem inter LO, &, ON, baſis ſemidiametrum, ſumantur duæ mediæ continuò proportionales, QO, OR, & in altitudine æquali, OR, nempè, T8, baſi, ℞8, æquali eidem, OR, fiat parallelogrammum rectangulum, 58, in cuius plano deſcribatur ſemicirculus, SY℞, & ipſum cum parallelogrammo reuoluatur circa manentem axim, T8, donec redeat vnde diſceſſit, patet autem, quod ex parallelogrammo fiet cylindrus, vt, SΦ, & ex figura, SY℞8T, tympanum ſphærale, 5YΦ. Dico igitur hoc tympanum eſſe æquale dato cylindro, ABC, &, T8, æqualem ipſi, 8℞, ſemidiametro baſis, ℞Φ. Sint parallelogrammum, SΦ, & figura, SYΦ, per axem tranſeuntia, & X&, per centra, X, &, circulorum ducta, ſecans, T8, in, Z, manifeſtum eſt igitur, quod, XZ, bifariam ſecabitur à circumferentia, SY℞, vt in, Y, cum, 8℞, ſit æqualis, ℞5, & ipſi, XZ, S℞, autem ſit dupla, XY, vnde ſi ſecetur, ℞8, bifariam in, 4, erit, ℞4, æqualis ipſi, XY, ſit autem ab ea dempta, ℞3, ad quem, 4℞, ſit vt

 qua-

quadratum ad inſcriptum circulum, & in, ℞8, ſumpta, 37, æqualis exceſſui, quo, 3℞, ſuperat $\frac{2}{3}$. tertiæ proportionalis duarum, 8℞, ℞4, patet ergò, quòd cylindrus, SΦ, ad tympanum, SYΦ, eſt vt, ℞8, ad, 87. Quoniam verò, vt, LO, ad, OQ, ſic eſt, QO, ad, OR, Corol. 12. 34. l. 3. ideò vt, LO, ad, OR, vel, T8, ipſi æqualem, ita quadratum, LO, ad quadratum, OQ, vel ita quadratum, RO, ſeu quadratum, ℞8, ad quadratum, NO, vel ita circulus, ℞Φ, ad circulum, NP, ergo duo cylindri, SΦ, KP, quorum axes reciprocè baſibus reſpondent, erunt æquales, quod ſerua. Vlterius, quia vt, IE, ad, EG, ſic eſt, E. Cor. 4. gener. 34. l. 2. 8℞, ad, ℞4, & vt, EG, ad, EF, ſic quadratum ad inſcriptum circulum, & ita etiam, ℞4, ad, ℞3, ergo ex æquali, IE, ad, EF, erit vt, 8℞, ad, ℞3. Similiter quia, IE, ad, EG, eſt vt, 8℞, ad, ℞4, &, EG, ad $\frac{2}{3}$. tertiæ proportionalis duarum, IE, EG, eſt vt, 4℞, ad $\frac{2}{3}$. tertiæ proportionalis duarum, 8℞, ℞4, ideò ex æquali, vt, IE, ad, $\frac{2}{3}$. tertiæ proportionalis duarum, IE, EG, ita, 8℞, erit ad $\frac{2}{3}$. tertię proportionalis duarum, 8℞, ℞4, eædem autem, IE, 8℞, ad, FE, 3℞, erant in eadem ratione, ergo ad exceſſus duarum, EF, ℞3, ſuper $\frac{2}{3}$. tertiarum proportionalium, IE, EG, ex vna parte, &, 8℞, ℞4, ex alia, erunt in eadem ratione .i. vt, IE, ad, FH, ita erit, 8℞, ad, 37, ſed etiam, vt, IE, ad, EF, ſic eſſe oſtenſum eſt, 8℞, ad, ℞3, ergo, colligendo, vt, IE, ad, EH, ita, 8℞, ad, ℞7, & per conuerſionem rationis, & conuertendo, vt, HI, ad, IE, ideſt vt, AD, ad, LO, ideſt vt cylindrus, BAC, ad cylindrum, NLP, vel illi æqualẽ, SΦ, (vt oſtenſum eſt) ita, 78, ad, 8℞, ſed vt, 78, ad, 8℞, ita tympanum, SYΦ, ad cylindrum, SΦ, ergo, vt cylindrus, BAC, ad cy- Corol. 12. 34. l. 3. lindrum, SΦ, ita tympanum, SYΦ, ad cylindrum, SΦ, ergo cylindrus, BAC, æquatur tympano, SYΦ, cuius axis, T8, ſemidiametro baſis, ℞8, eſt æqualis, quod, &c.

COROLLARIVM.

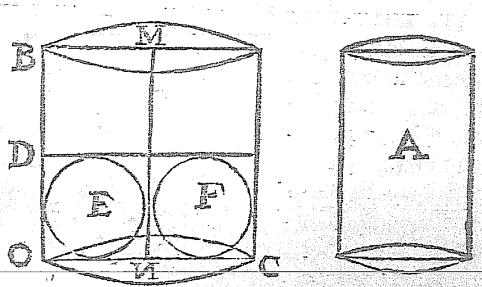
Colligitur autem iuxta Corollarium Propoſit. 26. huius, nos poſſe inuenire tympana ſphæralia, quorum axes ſemidiametris baſium ſint æquales, quæ ad datum quodcunq; ex ſolidis in ſectione 3. Coroll. 2. Propoſ. 25. huius enumeratis, datam rationem habeant.

PROBLEMA VI. PROPOS. XIX.

DAto cylindro anulum ſtrictum circularem æqualem inuenire.

Sit datus cylindrus, A, oportet illi anulum ſtrictum circularem æqualem inuenire. Reperiamus ergo cilindrum, qui ad cylindrũ A, ſit, vt duplum cuiuſuis quadrati ad circulum dicto quadrato inſcriptum, & deinde huic inuento cylindro alius inueniatur æqualis, BC, cuius axis ſit ęqualis diametro baſis .i. MN, ipſi, OC, qui diuidatur bifariã in, R, & per, R, ducto plano oppoſitis baſibus æquidiſtante, ſit conſtitutus cylindrus, DC, in quo planum per axem ductum produxerit parallelogrammum, DC, quod in duo ſeparabitur quadrata per ipſam, RN, ſint illis inſcripti æquales circuli, E, F, ex quorum reuolutione circa, RN, intelligatur effectus anulus ſtrictus circularis, EF. Dico hunc eſſe æqualem cylindro, A. Nam, BC, ad, A, eſt vt parallelogrammum, BN, .i. vt duplũ quadrati, DN, ad circulum, E, ſic autem eſt, BC, ad anulum ſtrictum genitum ex, E, igitur hic anulus cylindro, A, æqualis erit, quod inuenire opus erat.

Vt in propoſ. 26. huius.

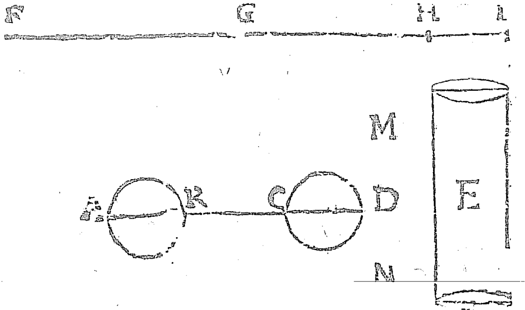


Elicitur ex Corol. 13. 34. l. 3.

PROBLEMA VII. PROPOS. XXX.

DAto cylindro anulo latum circularem ęqualem inuenire, dato circulo, qui per reuolutionem ipſum generat; oportet autem datum cylindrum maiorem eſſe anulo ſtricto ab eodem circulo per reuolutionem genito.

Sit datus cylindrus, E, datus circulus, CD, ſit autem datus cylindrus, E, maior anulo ſtricto per reuolutionem dati circuli circa ipſum rectam tangentem genito. Oportet anulum latum circularem inuenire ab eodem circulo per reuolutionem genitum, æqualem dato cylindro, E. Sit tangens circulum, CD, in puncto, D, ipſa, MN, circa quam fieri intelligatur reuolutio, vt deſcribatur anulus ſtrictus circularis ex, CD, fiat deinde, vt anulus ſtrictus ab eo genitus ad cylindrum, E, ita, DC, diameter eiuſdem ad aliam, FH, (quæ erit eadem maior, quia etiam cylindrus, E, eſt maior dicto anulo stricto) cui adijciatur in directum, HI, ipsi, DC, æqualis, deinde tota, FI, bifariam diuidatur in, G, & producta, DC, versus, C, indefinitè in ea sumatur, AD, æqualis ipsi, GI, & abscissa ab eadem ad punctum, A, ipsa, AR, eidem, CD, æquali, intelligatur circa, AR, diametrum descriptus circulus, AR, æqualis, CD. Dico anulũ latum circularem descriptum per, AR, reuolutum circa, MN, in tali situ, cylindro, E, æqualem esse. Nam strictus anulus descriptus à, CD, ad cylindrum, E, est vt, DC, ad, FH, &



quia, GI, est æqualis ipsi, AD, &, CD, ipsi, HI, erit, GH, æqualis ipsi, AC, ergo vt, DC, ad, FH, ita est eadem, DC, ad, IGH, vel ad, DAC, siue, AR, ad, ADR, (nam composita ex, AD, DR, est æqualis compositæ ex, DA, AC,) est autem vt, AR, ad compositã ex, AD, DR, ita anulus strictus genitus ex circulo, CD, ad anulũ latum genitum ex circulo, AR, ergo anulus strictus genitus ex circulo, CD, ad anulum latum genitum ex circulo, AR, erit, vt idem anulus strictus ad cylindrum, E, ergo anulus latus genitus ex circulo dato, AR, siue, CD, in tali situ, æqualis erit cylindro, E. Inuentum ergo est, quod opus erat.

Elicitur ex dictis in Corol. 29. 34. lib. 3. Sect. 2. & ea circulis applicētur.

COROLLARIVM I.

IVxta Coroll. autem Prop. 26. huius, manifestum est nos etiam dictos anulos in data ratione ad datum cylindrum inuenire posse, & subinde etiam in data ratione ad quodcunq; ex solidis in Sect. 3. Cor. 2. Prop. 25. huius enumeratis.

COROLLARIVM II.

HAbetur insuper si in recta, DA, indefinitè producta, continuentur à puncto, D, æquales circulorum diametri; ab eisdem circulis per reuolutionem circa, MN, deinceps genitos anulos sese habere, vt numeros impares ab vnitate continuò progredientes. Quod si in eadem recta linea perpendiculari ipsi, MN, vt in eadem, DA, indefinitè producta, continuentur à puncto, D, parallelogrammorum rectangulorum, in eademq; altitudine existentium, æquales bases, ijsq; bifariam sectis, ab effectis punctis educantur parallelogrammorum dictorum diametri, circa quas existant aliæ planæ figuræ eius conditionis, vt ducta quacunq; parallela, AD, illius portiones in his figuris conceptæ sint æquales, tum anuli descripti à dictis parallelogrammis se habebunt vt numeri impares ab vnitate deinceps expositi, tum etiã anuli geniti à prædictis figuris: Etenim isti anuli deinceps se habebunt, vt quadratum primæ æqualium rectarum linearum, in ipsa, DA, assumptarum, & excessus quadratorum deinceps subsequentium æqualium linearum, vt facilè innotescet, si in memoriam reuocentur, quæ dicta sunt in Coroll. 29. 34. Lib. 3. pro ibi consideratis figuris, quibus hæc quoq; adaptantur.

COROLLARIVM III.

MAnifestum etiam est nos posse iuxta supradictam methodum cætera solida attentare, vt eadem dato cylindro tum æqualia, tum etiam in data ratione inueniamus, veluti ex. gr. basim columnarem strictam, latam, ac mediam, Malum Roseum, Citrium, & reliqua, quæ in Sect. 3. Cor. 2. Prop. 25. huius enumerantur, vt subinde cuilibet ex consideratis in hoc volumine solidis inueniamus ex genere cuiuslibet nedum æquale, sed etiam in data ratione, quæ omnia singillatim prosequi minimè volui, tum ad vitandam prolixitatem, tum etiam, vt alijs iucundi exercitij occasionem non eripiam, veluti, & centri grauitatis nouorum solidorum inuentionem, nemini, quod sciã adhuc tentatam, alijs pro nunc relinquam, sufficiat enim in præsenti prædicta solida inueniendi rationem aliqualiter declarasse, centriq; grauitatis dictorum solidorum inuestigandi materiam præbuisse.

SCHOLIVM.

ADuertendum est autem circa supradicta solida, quorum mensurã præcisè non inuenimus, vt ex. g. patet de apicibus sphæralibus, tympanis, anulis, & alijs plurimis, neq; inuentionem prædictam esse, vel fore præcisam, non tamen aspernendam, cum proximè ad veritatem accedat.

THEO-

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXXI.

SI in ſpatio helico primi circuli ſpiralium conicus in eadem altitudine cum apice parabolico, in baſi dicto circulo exiſtente, ſit conſtitutus; apex parabolicus erit ſexquialter dicti conici.

Corol. 8. Prop. 51. l. 4. ſect. 1. 22. huius.

Patet hæc Propoſitio, nam ſi in dicto circulo, vt in baſi, & circa eundem axim cum dictis ſolidis ſit cylindrus conſtitutus, hic erit ſexcuplus apicis parabolici, & nonuplus dicti primi conici, ergo apex parabolicus ad cylindrum erit, vt 3. ad 18. & conicus ad ipſum, vt 2. ad 18. vnde apex ad conicum erit, vt 3. ad 2. ideſt in ratione ſexquialtera, quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXXII.

SI circa diametrum baſis ſemianuli ſtricti parabolici tanquam circa propriam diametrum ſphæra, vel ſphærois, fuerit conſtituta, cuius ſecunda diameter ſit æqualis altitudine, ſiue axi, eiuſdem ſemianuli; dicta ſphæra, vel ſphærois ipſi ſemianulo æqualis erit.

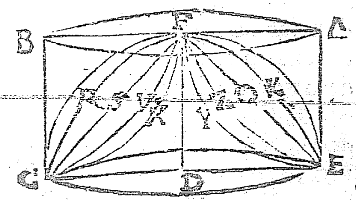
Corol. 10. 51. lib. 4. ſect. poſterior. Coroll. 1. 34. l. 3.

Hæc etiam patet, nam cylindrus in eadem baſi cum ſemianulo dicto, & eadem altitudine, eſt eiuſdem ſexquialter, eſt autem etiã ſexquialter dictæ ſphæræ, vel ſphæroidis, & ideò dicta ſphæra, vel ſphærois, erit æqualis dicto ſemianulo, quod oſtendendum erat.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXXIII.

SI cylindrus, & conus, hæmiſphærium, vel hæmiſphæroides, conoides parabolicum, apex parabolicus, & ſphæralis, fuerint in baſi eodem circulo, & circa eundem axim, infraſcriptam rationem inter ſe habebunt.

Sit cylindrus, BE, in baſi circulo, CE, circa axem, FD, in quibus ſint etiam hæmiſphærium, vel hæmiſphæroides, CFE, conoides parabolicum, CRFKE, conus, CFE, apex parabolicus, CVFZE, & apex ſphæralis, vel ſphæroidalis, CXFYF, qualium igitur partium cylindrus, BE, eſt 126. talium hæmiſphærium eſt 84. conoi



noides 63. conus 42. apex parabolicus 21. apex ſphæralis 12. vnde patet hæmiſphærium, vel hæmiſphæroides ſexquitertium eſſe conoidis parabolici, quadruplum apicis parabolici, & ſeptuplum apicis ſphæralis. Conoides verò parabolicum triplum eſſe apicis parabolici, & quintuplum ſexquiquartum apicis ſphæralis, quæ ex ipſis numeris colliguntur, ſimiliter conum, FCE, duplum eſſe apicis parabolici, triplum ſexquialterum proximè apicis ſpæralis, quoad apicem ſphæralem enim ſemper proximam dictam rationẽ intellige, & tandem apex parabolicus ad ſphæralem erit ſexquiſupertripartiens quartas.

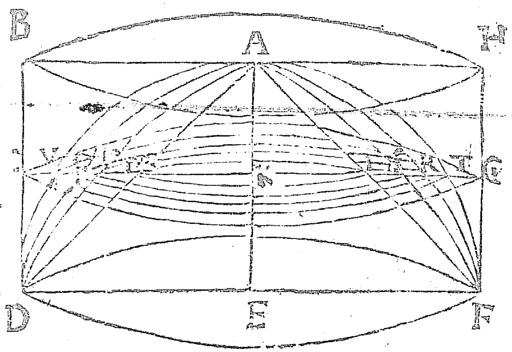
Corol. 10. 51. l. 4. ſec. poſterior. Coroll. 1. 51. l. 4. 1. Corol. 4. gener. 34. l. 2. Corol. 8. 51. l. 4. ſectio 1. Coroll. 11. 34. l. 3.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXXIV.

SI in baſi cylindri, & circa eundem axim, fuerint hæmiſphærium, vel hæmiſphæroides, conoides parabolicum, hyperbolicum, & conus, ſecto verò axi vtcunque, ducatur planum per punctum ſectionis baſi æquidiſtans. Abſciſſæ per ductum planum à dictis ſolidis portiones erũt ad ſolida, à quibus abſcinduntur in ratione infraſcripta. Similiter demptis dictis ſolidis ſingillatim à cylindro, abſciſſæ per ductum planum portiones ad reſiduum cylindri, demptis ſolidis iam dictis, erunt in ratione infraſcripta.

Sit cylindrus, BF, in baſi circulo, DF, & circa axim, AE, circa quem in eadem baſi ſit hæmiſphærium, vel hæmiſphæroides, DVATF, conoides parabolicum DOARF, hyperbolicum, DNASF, & conus, DMAIF, ſumpto autẽ vtcunq; puncto in, AE, quod ſit, k, per, k, ducatur planũ, CG, baſi, DF, æquidiſtans. Igitur hæmiſphæriũ, vel hæmiſphæroides, DVATF, ad portionẽ, VAT, erit vt parallelepipedũ ſub dupla, AE, & quadrato, AE, ad parallelepipedum ſub compoſita ex dupla, AE, & ex, EK, & ſub quadrato, KA. Conoides parabolicum, DOARF, ad conoides, OAR, erit vt quadratum, EA, ad quadratum, AK. Conoides hyperbolicum, DNASF, ad conoides, NAS, vt parallelepipedum ſub compoſita ex ſexquialtera tranſuerſi eiuſdem lateris, &, EA, & ſub quadrato, EA, ad

Coroll. 7. 34. l. 3. Coroll. 3. 51. l. 4. Coroll. 2. 30. l. 5.



A, ad parallelepipedum ſub compoſita ex ſexquialtera eiuſdem tranſuerſi lateris, &, KA, & quadrato, KA. Conus verò, DAF, ad conum, MAI, vt cubus, EA, ad cubum, AK.

F. H. Cor. gen. 34. l. 2. Nunc intelligatur demptum à cylindro, BF, hæmiſphærium, vel hæmiſphæroides, DVATF. Igitur per demonſtrata patet reliquum cylindri ab abſciſſam ab eo portionem per ductum planum eſſe, vt
Coroll. 9. 34. l. 3. cubus, AE, eſt ad cubum, EK. Dempto autem conoide parabolico ab eodem cylindro; reliquum cylindri ab abſciſſam portionē
Coroll. 9. 51. l. 4. erit, vt quadratum, AE, ad quadratum, EK. Dempto verò conoide hyperbolico ab eodem cylindro, reliquum cylindri ad abſciſſam portionem erit, vt parallelepipedum ſub compoſita ex ſexquialtera tranſuerſi lateris, & dupla axis eiuſdem, & ſub qua-
Coroll. 5. 30. l. 5. drato eiuſdem axis, ad parallelepipedum ſub compoſita ex ſexquialtera eiuſdem tranſuerſi lateris, & axibus vtriuſq; portionis, & ſub quadrato exceſſus maioris axis ſuper minorem. Tandem dempto cono, DAF, à cylindro, BF, reſiduum cylindri ad abſciſsā portionem erit, vt cubus, AE, ad parallelepipedum ſub ſexquialte-
Defin. 12. l. 1. ra, kE, & ſub rectangulo, AKE, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, KE. Nam cy-
C. Cor. 4. gener. 34. l. 2. lindrus, BF, ad reliquum cylindri, CF, dempto fruſto coni, DMIF, habet rationem compoſitam ex ea, quam habet cylindrus, BF, ad cylindrum, CF, ideſt ex ea, quam habet, AE, ad, EK, & ex ratio-
Collig. ex L. Coroll. 4. gener. 34. l. 2. ne cylindri, CF, ad reliquum, dempto à cylindro, CF, fruſto, DMIF, quæ eſt ea, quam habet quadratum, DE, ad rectangulum, CMK, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, CM, vel quadratum, EA, ad rectangulum, EKA, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, EK, eſt autem reliquum cylindri, BF, dempto cono, DAF, $\frac{2}{3}$. eiuſdem cylindri, ergo reliquum cylindri, BF, dempto cono, DAF, ad reliquum cylindri, CF, dempto fruſto, DMIF, erit in ratione compoſita ex ea, quam habet $\frac{2}{3}$. AE, ad, EK, ideſt, AE, ad ſexquialteram, EK, & quadratum, AE, ad rectangu-
D. G. Cor. gen. 34. l. 2. lum, AKE, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, kE, quæ duæ rationes componunt rationem cubi, AE, ad parallelepipedum ſub ſexquialtera, Ek, &

ſub

ſub rectangulo, AkE, cum $\frac{2}{3}$. quadrati, kE, ſic igitur erit reſiduum cylindri, BF, dempto cono, DAF, ad reſiduum cylindri, CF, dempto fruſto, DMIF; cætera autem ex ſuis Propoſitionibus patent, quæ explicanda proponebantur.

COROLL. GENERALE.

Licet autem in ſuperioribus huius Libri Propoſitionibus tantummodo cylindros, conos, ſphæras, ſphæroides, conoides parabolicas, & hyperbolicas, apices ſphærales, atque anulos, apices parabolicos, & ſemianulos, ac cætera conſimilia ſolida fuerimus contemplati, quorum omnia plana ſunt omnes figuræ ſimiles figurarum, quæ eorundem genitrices appellantur, ſcilicet in his ſolidis, aſſumptis tantum ſimilibus figuris, quæ ſint circuli, vel ellipſes; tamen manifeſtum eſt, ſi vice circulorum, vel ellipſium alia fuiſſent aſſumptæ ſimiles figuræ, quod eadem circa talia ſolida Theoremata, vel Problemata ſimilia præpoſitis conſtruere potuiſſemus. Vnde ex. g. veluti in Prop. 36. huius inuenimus ſphæram æqualem dato cylindro, ita ſi vice cylindri habuiſſemus cylindricum, cuius baſis fuiſſet triangulum æquilaterum, poteramus vice ſphæræ inuenire ſolidum, cylindrico dato ſimilare, genitum ex circulo, cuius nempè omnia plana fuiſſent omnes figuræ ſimiles, ideſt omnia triangula æquilatera, circuli, qui erat ſphæræ, & eſt huius ſolidi genitrix figura, & eodem modo in cæteris hanc commutationem proſequi, aſſumptis quibuſcumque ſimilibus figuris genitricium figurarum, ex quibus dicta ſolida ad inuicem ſimilaria genita dicuntur, quam varietatem, vt & alia quamplurima tum Problemata, tum Theoremata, quæ ex hactenus oſtenſis deduci poſſent, quæq; Lectoris induſtria relinquuntur, cuiq; licebit iuxta propoſitam methodum facilè meditari, & propterea circa hæc non amplius immorandum mihi eſſe cenſui.

Finis Sexti Libri.